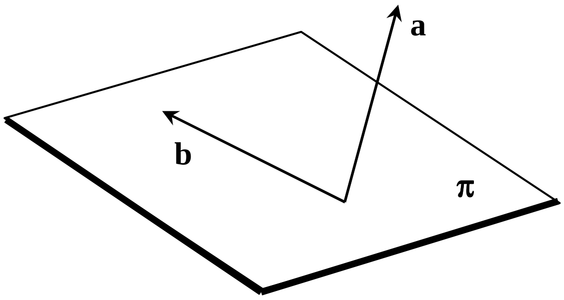
W punkcie konstrukcji istnieje stan naprężenia reprezentowany przez macierz $\mathbf{T}_\sigma$. Znaleźć równoległą do wektora **b** składową naprężenia stycznego w płaszczyźnie przekroju o normalnej **a** .

Dane: $\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$



Uwaga: Aby zadanie miało sens wektory **a** i **b** muszą być do siebie prostopadłe, bo wektor **a** jest prostopadły do płaszczyzny π , a wektor **b** leży w tej płaszczyźnie. Obliczenie iloczynu skalarnego wektorów **a** i **b** daje wartość zero, czyli wektory **a** i **b** są do siebie prostopadłe.

Obliczenie wektora naprężenia przy przecięciu płaszczyzną o normalnej **a** : $\mathbf{p}_{va}$

Wersor normalny do płaszczyzny π : $\mathbf{v}_a = \mathbf{a} / |\mathbf{a}| = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{p}_{va} = \mathbf{T}_\sigma\ \mathbf{v}_a = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{MPa} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ 17 \end{bmatrix} \mathrm{MPa} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 39 \\ 69 \\ 51 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

Miara rzutu wektora $\mathbf{p}_{va}$ na kierunek $\mathbf{v}_a$:

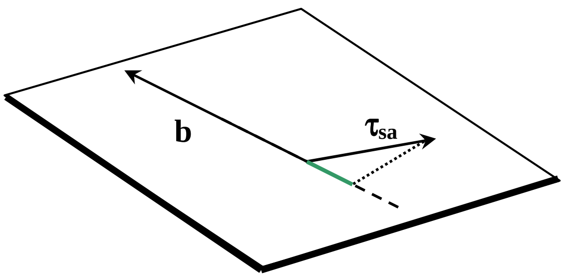
$$\mathbf{p}_{va}\ \mathbf{v}_a = \frac{1}{9}\ (13+46+34)\ \mathrm{MPa} = \frac{93}{9}\ \mathrm{MPa} = \frac{31}{3}\ \mathrm{MPa} = 10{,}333\ \mathrm{MPa}$$

Składowa normalna wektora naprężenia $\mathbf{p}_{va}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{na} = (\mathbf{p}_{va}\ \mathbf{v}_a)\ \mathbf{v}_a = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 31 \\ 62 \\ 62 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

Składowa styczna wektora naprężenia $\mathbf{p}_{va}$:

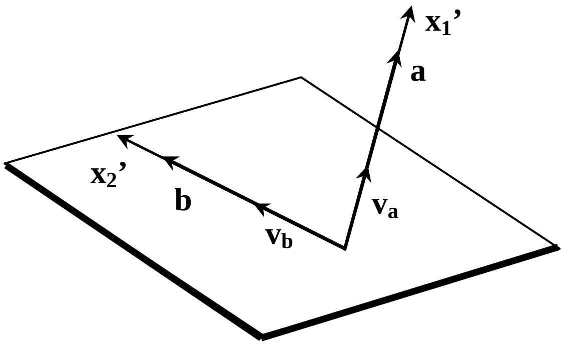
$$\boldsymbol{\tau}_{sa} = \mathbf{p}_{va} - \boldsymbol{\sigma}_{na} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 39-31 \\ 69-62 \\ 51-62 \end{bmatrix} \mathrm{MPa} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -11 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$



Miarę równoległej do wektora **b** składowej naprężenia stycznego $\boldsymbol{\tau}_{sa}$, znajdziemy rzutując wektor $\boldsymbol{\tau}_{sa}$ na kierunek wektora **b** , czyli obliczając iloczyn skalarny $\boldsymbol{\tau}_{sa}\ \mathbf{v}_b$, gdzie $\mathbf{v}_b$ to wersor równoległy do wektora **b** .

$$\tau_{sa}\ \mathbf{v_b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}8\\7\\-11\end{bmatrix}\text{MPa} \bullet \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{27}\ (16–14–11)\ \text{MPa} = \frac{-9}{27}\ \text{MPa} = \frac{-1}{3}\ \text{MPa}$$

Powyższy wynik można uzyskać inną drogą, mianowicie wykorzystując wzór transformacyjny dla tensora 2-go rzędu a takim jest macierz naprężeń.
Wektory **a** i **b** po unormowaniu dadzą wersory $\mathbf{v_a}$ i $\mathbf{v_b}$ które definiują w przestrzeni osie nowego („primowanego”) układu współrzędnych.



Wielkość o której mowa w temacie zadania, czyli równoległa do wektora **b** składowa naprężenia stycznego w płaszczyźnie przekroju o normalnej **a** , może być potraktowana jako element macierzy naprężeń w układzie osi związanych z osiami $\mathbf{x_1'}$ i $\mathbf{x_2'}$, czyli będzie to element σ_{12}' macierzy naprężeń w nowym układzie współrzędnych.

Zapisując wzór transformacyjny dla tego elementu otrzymamy:
$\sigma_{12}' = \alpha_{1i}\ \alpha_{2j}\ \sigma_{ij}$, gdzie współczynniki α to elementy macierzy przejścia, czyli współrzędne wersorów $\mathbf{v_a}$ i $\mathbf{v_b}$.

$$\mathbf{v_a} = \mathbf{a} / |\mathbf{a}| = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{12}\\\alpha_{13}\end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v_b} = \mathbf{b} / |\mathbf{b}| = \begin{bmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{21}\\\alpha_{22}\\\alpha_{23}\end{bmatrix}$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$\begin{aligned}\sigma_{12}' = \alpha_{1i}\ \alpha_{2j}\ \sigma_{ij} = {} & \alpha_{11}\ \alpha_{21}\ \sigma_{11} + \alpha_{11}\ \alpha_{22}\ \sigma_{12} + \alpha_{11}\ \alpha_{23}\ \sigma_{13} + \\ & \alpha_{12}\ \alpha_{21}\ \sigma_{21} + \alpha_{12}\ \alpha_{22}\ \sigma_{22} + \alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \sigma_{23} + \\ & \alpha_{13}\ \alpha_{21}\ \sigma_{31} + \alpha_{13}\ \alpha_{22}\ \sigma_{32} + \alpha_{13}\ \alpha_{23}\ \sigma_{33} = \\ & \frac{1}{9}\ (\ 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\ & \quad 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 11 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + \\ & \quad 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 8\ )\ \text{MPa} = \frac{-3}{9}\ \text{MPa} = \frac{-1}{3}\ \text{MPa}\end{aligned}$$

Dodatkowo rozważymy zadanie o zmodyfikowanym temacie:

W punkcie konstrukcji istnieje stan naprężenia reprezentowany przez macierz $\mathbf{T_\sigma}$. Znaleźć równoległą do wektora **a** składową naprężenia normalnego w płaszczyźnie przekroju o normalnej **a** .

Modyfikacje oryginalnego tematu zaznaczono w poprzednim zdaniu zielonym kolorem.
Jeżeli poszukiwane jest naprężenie normalne, to nie jest konieczne wskazywanie jeszcze raz do jakiego wektora ma być ono równoległe jeżeli jest określona płaszczyzna przekroju. Po tej uwadze temat zmodyfikowanego tematu może przyjąć brzmienie:

W punkcie konstrukcji istnieje stan naprężenia reprezentowany przez macierz $\mathbf{T_\sigma}$. Znaleźć naprężenie normalne w płaszczyźnie przekroju o normalnej **a** .

Rozwiązaniem tak postawionego zadania będzie znalezienie elementu σ_{11}' macierzy naprężeń w nowym układzie współrzędnych.
Zapisując wzór transformacyjny dla tego elementu otrzymamy:

$$\sigma_{11}' = \alpha_{1i}\ \alpha_{1j}\ \sigma_{ij} = \alpha_{11}\ \alpha_{11}\ \sigma_{11} + \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \sigma_{12} + \alpha_{11}\ \alpha_{13}\ \sigma_{13} +$$
$$\alpha_{12}\ \alpha_{11}\ \sigma_{21} + \alpha_{12}\ \alpha_{12}\ \sigma_{22} + \alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \sigma_{23} +$$
$$\alpha_{13}\ \alpha_{11}\ \sigma_{31} + \alpha_{13}\ \alpha_{12}\ \sigma_{32} + \alpha_{13}\ \alpha_{13}\ \sigma_{33} =$$
$$\frac{1}{9}\,(\ 1 \cdot 1 \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 +$$
$$2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 11 + 2 \cdot 2 \cdot 0 +$$
$$2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 8\ )\ \text{MPa} = \frac{93}{9}\ \text{MPa} = \frac{31}{3}\ \text{MPa}$$

Oczywiści taki sam wynik otrzymano wcześniej inną drogą, przypomnijmy:
- miara rzutu wektora $\mathbf{p_{va}}$ na kierunek $\mathbf{v_a}$:

$$\mathbf{p_{va}}\ \mathbf{v_a} = \frac{1}{9}\ (13+46+34)\ \text{MPa} = \frac{93}{9}\ \text{MPa} = \frac{31}{3}\ \text{MPa} = 10{,}333\ \text{MPa}$$