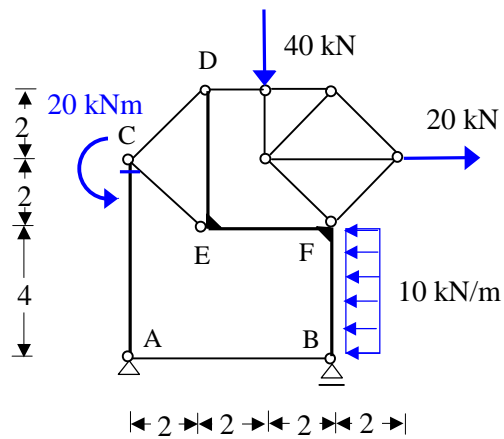


**Przykład 1.1.** Rozwiązać układ złożony.

wymiary w  
m



### Rozwiązanie

Analiza układu pokazuje, że składa się on z dwóch zasadniczych części: części ramowej A-C-D-E-F-B (układ trójprzegubowy ze ściągiem) na którym w punktach D i F opiera się kratownica. Możemy więc wpierrw rozwiązać kratownicę, a następnie układ ramowy.

Rozwiązanie kratownicy.

Rozwiązanie jej nie powinno stanowić trudności.

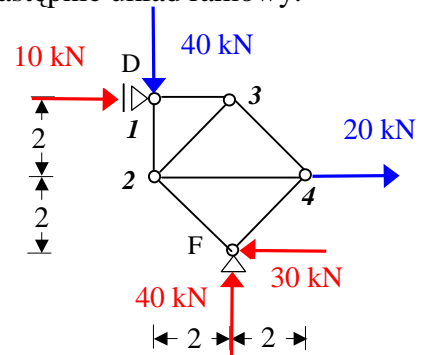
Schemat statyczny i wartości reakcji obok.

Wartości sił podłużnych w prętach podane są niżej:

$$N_{12} = -40.0 \text{ kN}, N_{13} = -10.0 \text{ kN}, N_{23} = 7.07 \text{ kN},$$

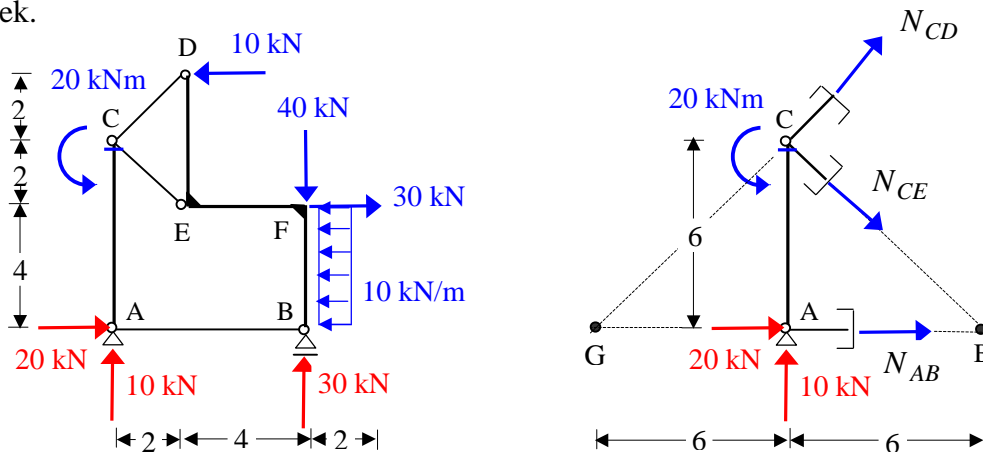
$$N_{34} = -7.07 \text{ kN}, N_{24} = 30.0 \text{ kN}, N_{2F} = -49.50 \text{ kN},$$

$$N_{4F} = -7.07 \text{ kN}.$$



Rozwiązanie układu ramowego.

Obciążony siłami oddziaływania wspierającej się na nim kratownicy, ma reakcje pokazane na rysunku niżej. Siły podłużne w prętach kratowych A-B, C-D i C-E wyznaczmy rozpatrując równowagę lewej części ramy po wykonaniu przekroju jej na dwie części jak to pokazuje rysunek.



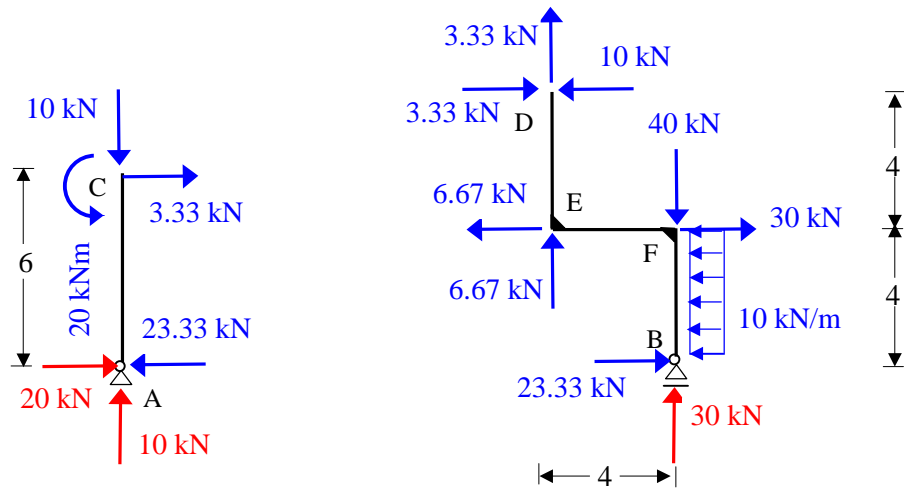
Z warunków równowagi odciętej części ramy otrzymujemy:

$$\sum M_C = 0; N_{AB} * 6 + 20 * 6 + 20 = 0 \rightarrow N_{AB} = -23.33 \text{ kN},$$

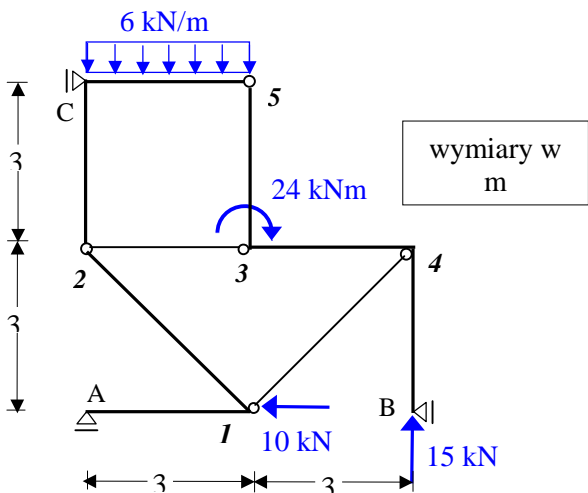
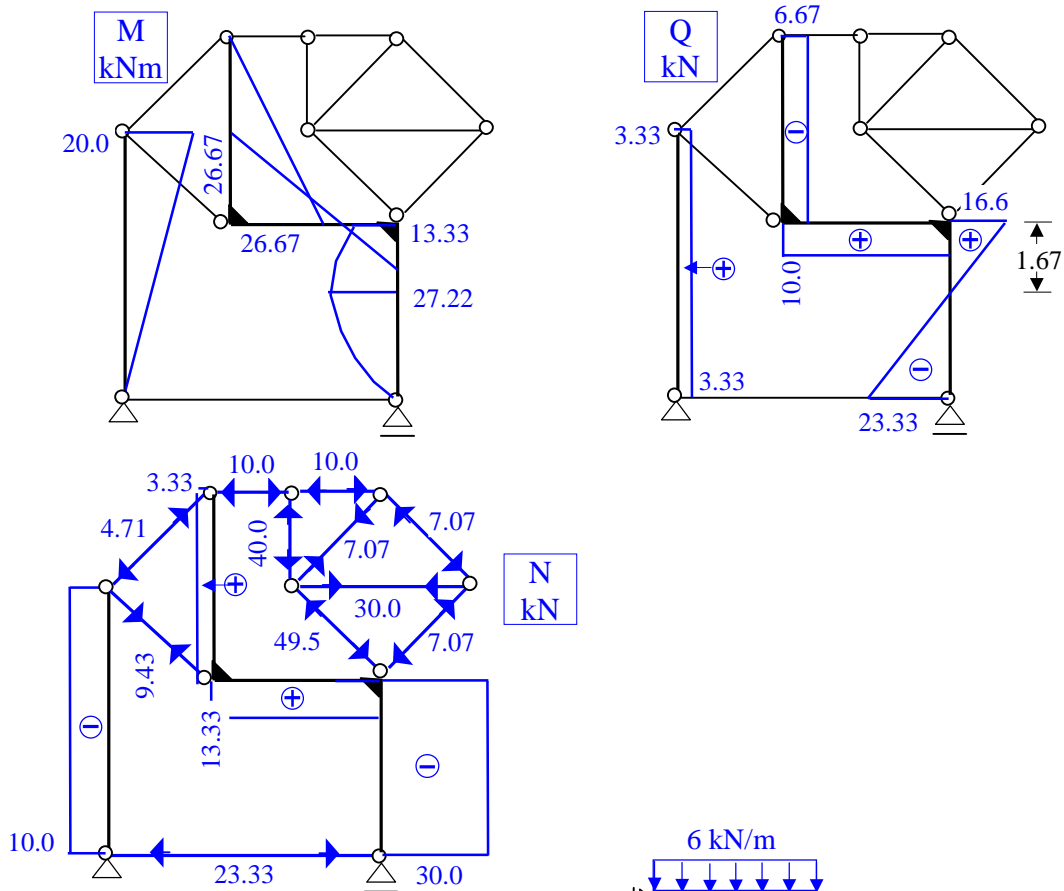
$$\sum M_B = 0; N_{CD} * 6\sqrt{2} + 10 * 6 - 20 = 0 \rightarrow N_{CD} = -4.71 \text{ kN},$$

$$\sum M_G = 0; N_{CE} * 6\sqrt{2} - 10 * 6 - 20 = 0 \rightarrow N_{CE} = 9.43 \text{ kN}.$$

Stąd siły obciążające pręty ramowe rozważanej konstrukcji przedstawiają się następująco:



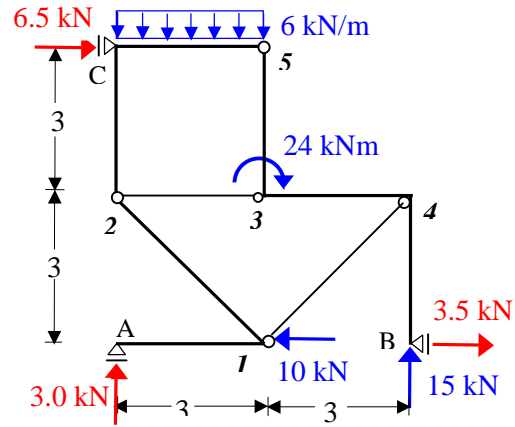
Wykresy i wartości sił przekrojowych w układzie pokazują poniższe rysunki.



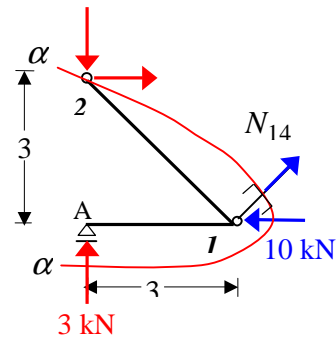
**Przykład 1.2.** Rozwiązać układ złożony.

**Rozwiązanie**

Analizując konstrukcję możemy zobaczyć, że stanowią ją trzy układy ramowe A-1-2, 2-C-5 i 5-3-4-B, połączone przegubami 2 i 5 oraz spięte dwoma prętami kratowymi (ciągami) 1-4 i 2-3. Ten geometrycznie niezmienny układ opiera się na trzech przegubowo przesuwnych podporach. Konstrukcja jest geometrycznie niezmienna i statycznie wyznaczalna. Wartości reakcji wyliczone z warunków równowagi układu jako całości pokazane są na rysunku obok.



Występowanie prętów kratowych sugeruje sposób rozwiązania polegający na dokonaniu przecięć przez te pręty i odpowiednie przeguby w celu wyznaczenia występujących w prętach sił osiowych a następnie wyznaczenie sił przekrojowych w częściach ramowych. Siłę w pręcie 1-4 wyznaczmy z przekroju  $\alpha - \alpha$  i warunku zerowania się momentów względem przegubu 2 sił działających na część dolną (patrz rys. obok).



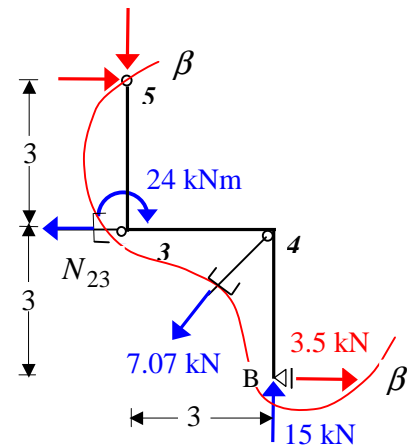
$$\sum M_2 = 0; N_{14} * 3\sqrt{2} - 10 * 3 = 0 \rightarrow N_{14} = 7.07 \text{ kN.}$$

Teraz z przekroju  $\beta - \beta$  i zerowania się momentów względem przegubu 5 części prawej wyznaczmy siłę podłużną w pręcie 2-3.

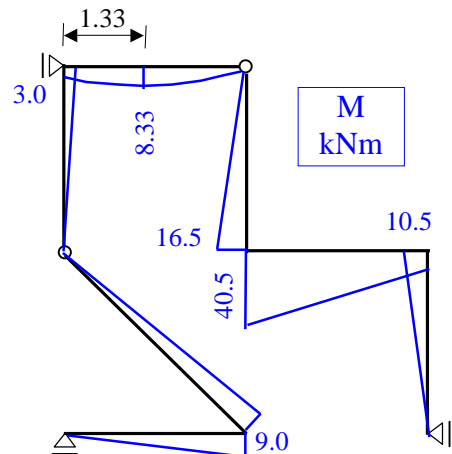
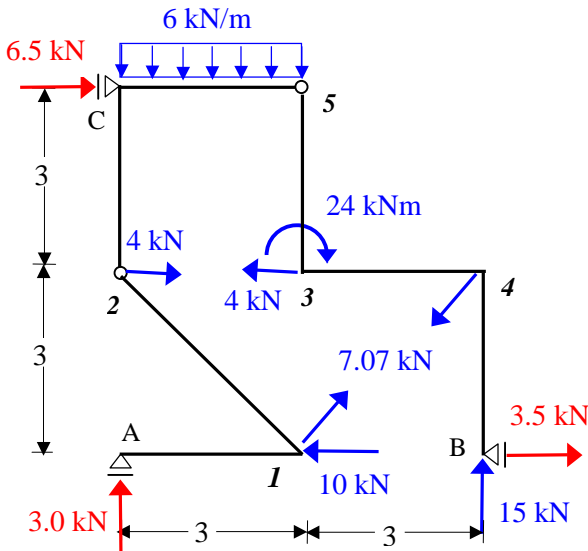
$$\sum M_5 = 0;$$

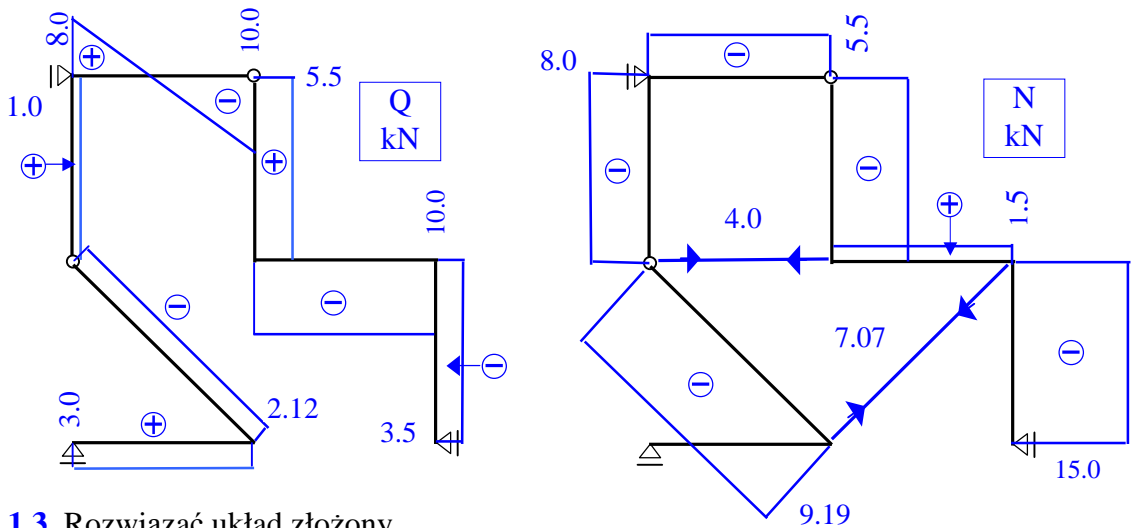
$$N_{23} * 3 + 7.07 * 3\sqrt{2} + 24 - 3.5 * 6 - 15 * 3 = 0 \rightarrow$$

$$N_{23} = 4.0 \text{ kN.}$$

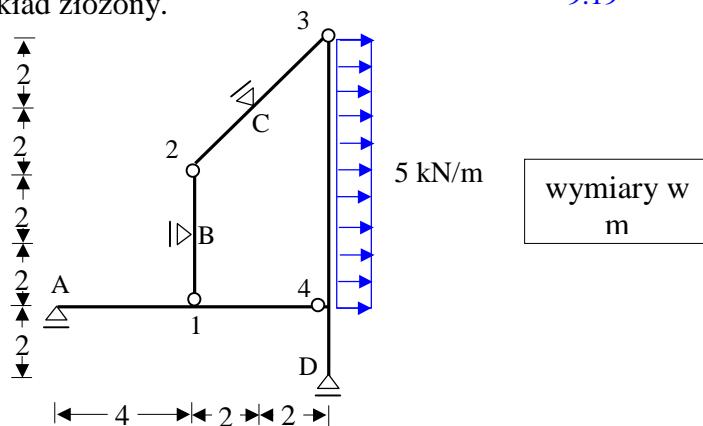


Siły obciążające pręty ramowe rozważanego układu i wykresy sił przekrojowych pokazane są niżej.





**Przykład 1.3.** Rozwiązać układ złożony.

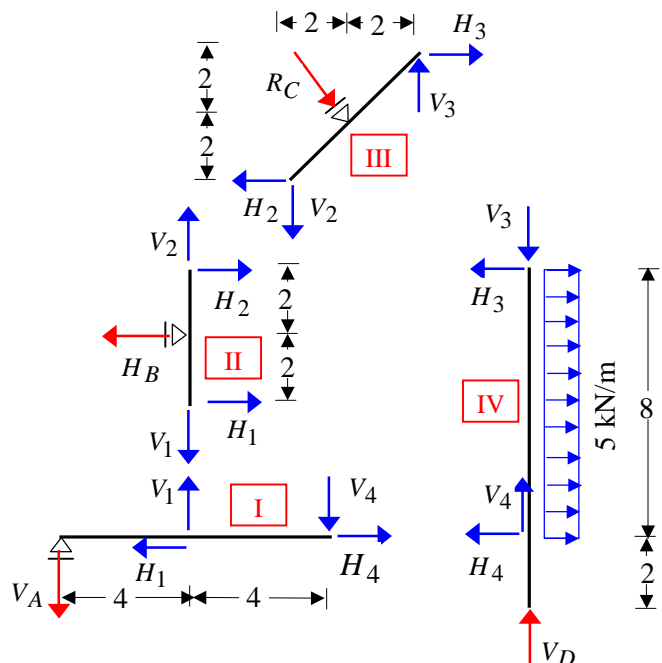


**Rozwiązanie**

Wszystkie pręty tego układu są prętami ramowymi, stąd żadne ułatwienia w jego rozwiązaniu polegające na przecięciach przez przeguby i pręty kratowe nie mogą być zastosowane. W dodatku nie można wyznaczyć wartości reakcji rozpatrując warunki równowagi całego układu. Wynika z tego, że jedynym rozsądnym podejściem do jego rozwiązania to rozbitcie na podukłady (jak to pokazane jest obok) i kolejne ich rozwiązywanie. Mamy teraz cztery układy w których występuje 12 niewiadomych reakcji oraz wzajemnych oddziaływań w przegubach, i możemy napisać 12 równań równowagi do ich wyznaczenia.

Takie podejście niewątpliwie doprowadzi do wyniku, ale jest jednak dość żmudne.

Aby tego uniknąć możemy analizując warunki równowagi poszczególnych części szybciej dojść do rozwiązania.



Z warunków równowagi części IV (patrz rys. obok) otrzymujemy:

$$\sum M_4 = 0 \rightarrow H_3 = 20.0 \text{ kN},$$

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow H_4 = 20.0 \text{ kN}.$$

Z warunków równowagi części I ( $\sum X = 0$ ) wynika:  $H_1 = 20.0 \text{ kN}$ .

Teraz z warunków równowagi części II wyznaczmy:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow H_2 = 20.0 \text{ kN},$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow H_B = 40.0 \text{ kN}.$$

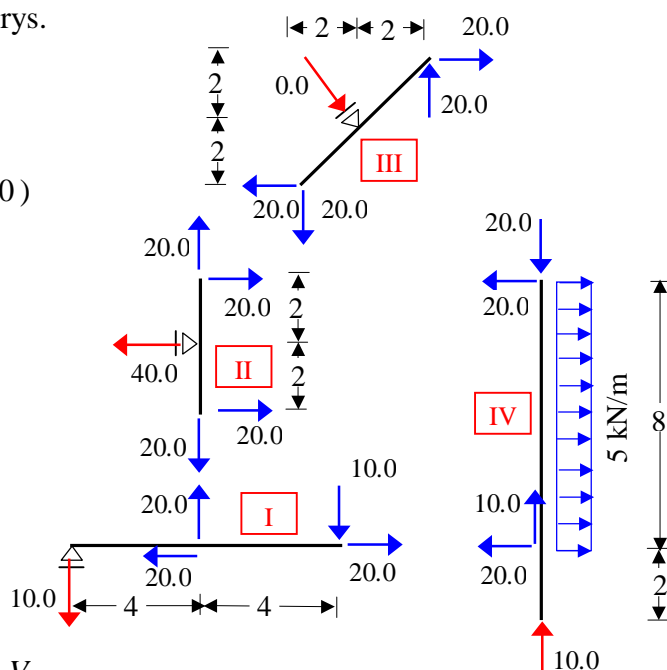
Z warunków równowagi części III otrzymujemy:

$$\sum X = 0 \rightarrow R_C = 0,$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow V_3 = 20.0 \text{ kN},$$

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow V_2 = 20.0 \text{ kN}.$$

Pozostało do wyznaczenia:  $V_A$ ,  $V_1$ ,  $V_4$  i  $V_D$ .



Teraz z warunków równowagi części II otrzymamy:

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_1 = 20.0 \text{ kN}, \text{ a z warunków równowagi części I:}$$

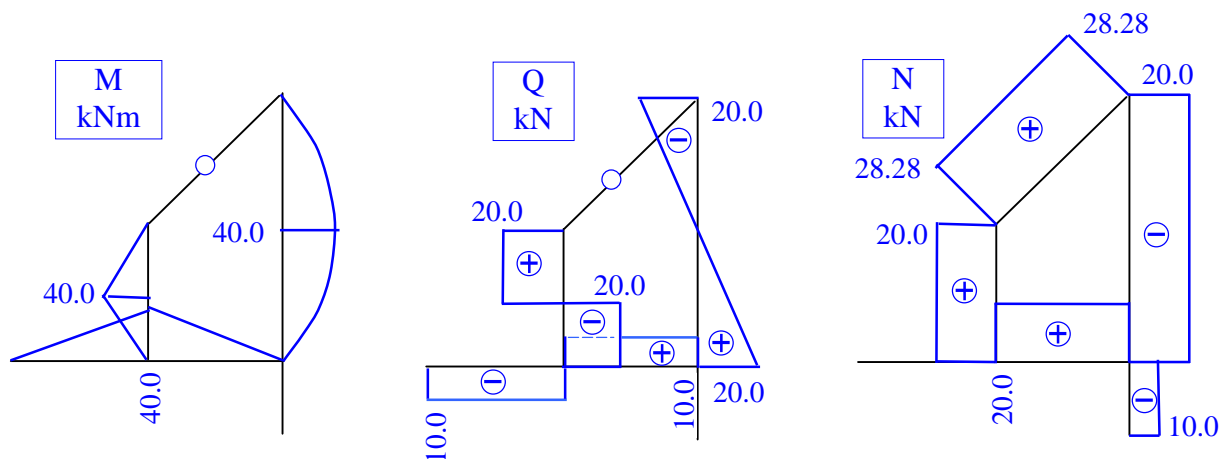
$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_4 = 10.0 \text{ kN}, \quad \sum M_1 = 0 \rightarrow V_A = 10.0 \text{ kN}.$$

Kończymy analizując równowagę części IV, z której wynika:

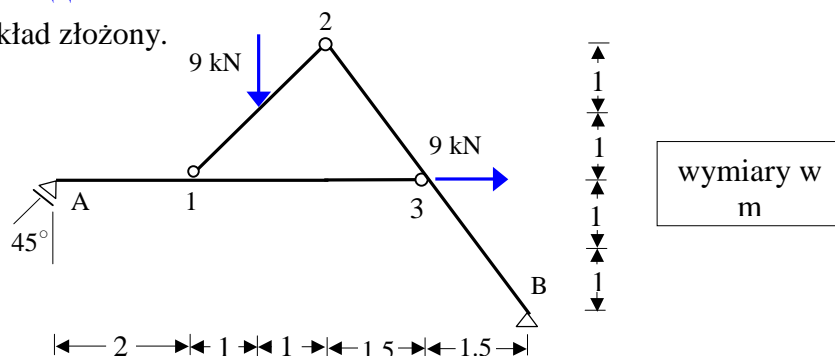
$$\sum Y = 0 \rightarrow V_D = 10.0 \text{ kN}.$$

Ostatecznie wyznaczone wartości oddziaływań pokazuje rysunek wyżej.

Wykresy sił przekrojowych pokazane są na rysunkach niżej.

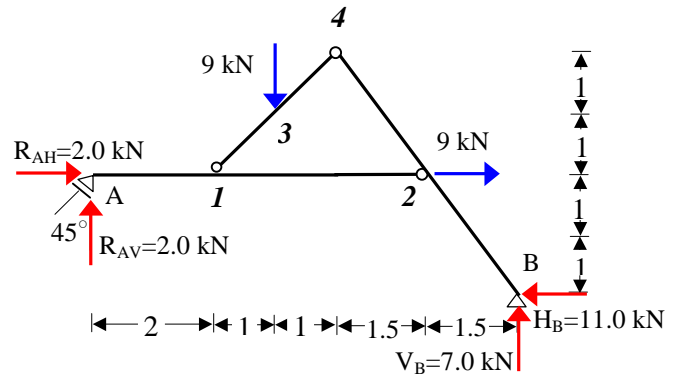


**Przykład 1.4.** Rozwiązać układ złożony.



## Rozwiązanie

Wszystkie pręty tego układu są prętami ramowymi, stąd żadne ułatwienia w jego rozwiązaniu polegające na przecięciach przez przeguby i pręty kratowe nie mogą być zastosowane. Ale tym razem w przeciwieństwie do przykładu 1.2, łatwo wyznaczmy wartości reakcji z warunków równowagi układu jako całości, ich wartości pokazane są na rysunku obok.



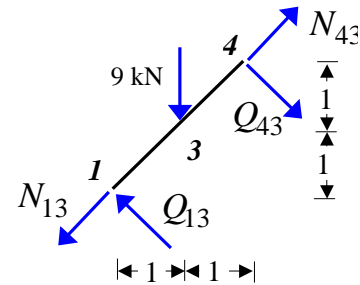
Mając obliczone reakcje możemy wyznaczyć wartości sił przekrojowych w prętach A-I i 2-B. Aby wyznaczyć wykres momentów na pręcie 1-3-4 wycinamy go z konstrukcji i obliczamy prostopadłe do niego oddziaływania konstrukcji, które przyjmiemy do obliczeń ze zwrotami dodatnich sił poprzecznych.

Z warunków równowagi wyciętego pręta 1-3-4 otrzymujemy:

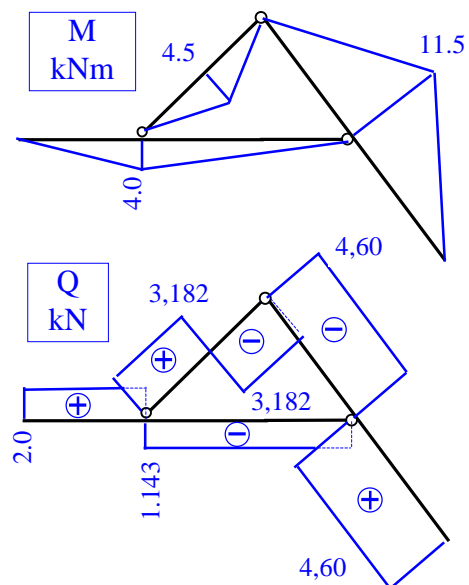
$$\sum M_4 = 0 \rightarrow Q_{13} = 3.182 \text{ kN},$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow Q_{43} = -3.182 \text{ kN},$$

co pozwala na wyznaczenie w nim momentów zginających i sił poprzecznych



Momenty zginające i siły poprzeczne w pozostałych przedziałach charakterystycznych możemy wyznaczyć postępując analogicznie. Ale możemy to zrobić prościej pamiętając, o zerowaniu się momentów w przegubach i liniowości funkcji momentów w przypadku braku obciążenia w przedziale. Zatem wykres momentów w rozważanym układzie przedstawia się tak jak to pokazuje rysunek obok. A wykres sił poprzecznych bardzo łatwo wyznaczmy korzystając z zależności między pochodną momentów i siłą poprzeczną.



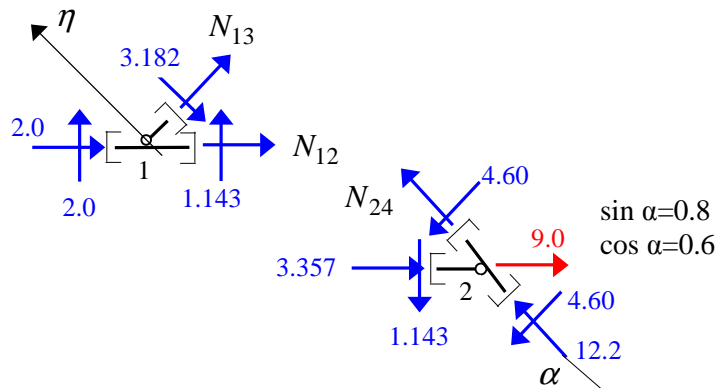
Wykres sił poprzecznych pokazany jest obok na rysunku.

Siły podłużne wyznaczmy wycinając węzły i rozpatrując warunki równowagi sił na nie działających.

Węzeł 1

$$\sum Y = 0 \rightarrow N_{13} = -1.263 \text{ kN},$$

$$\sum \eta = 0 \rightarrow N_{12} = -3.357 \text{ kN}.$$

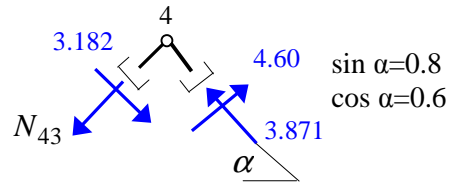


Węzeł 2

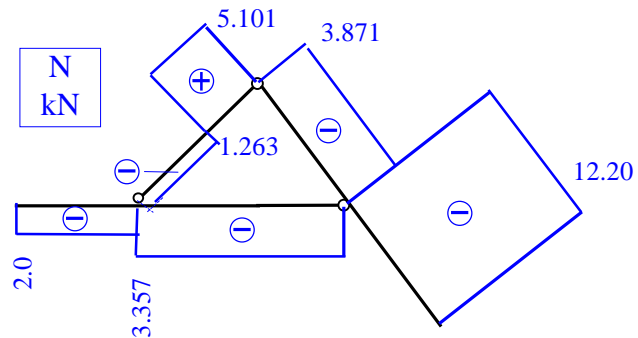
$$\sum Y = 0 \rightarrow N_{24} = -3.871 \text{ kN}.$$

Węzeł 4

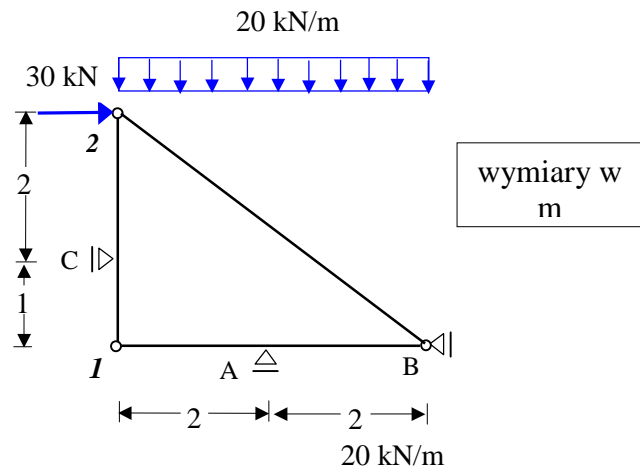
$$\sum Y = 0 \rightarrow N_{43} = 5.101 \text{ kN.}$$



Wykresy sił podłużnych  
pokazuje rysunek obok.



**Przykład 1.5.** Rozwiązać układ złożony.

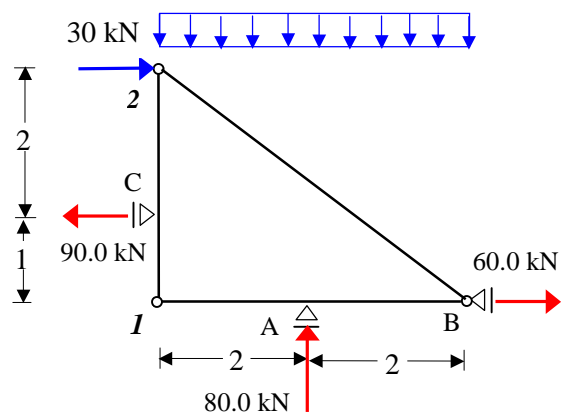


**Rozwiązanie**

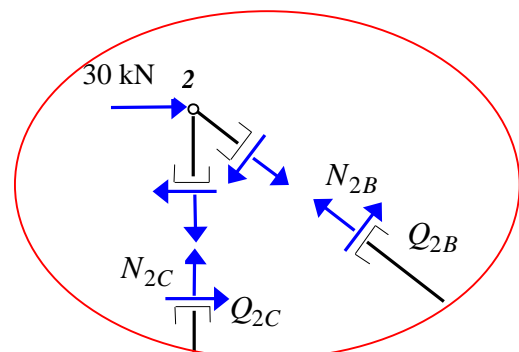
Wszystkie pręty tego układu są prętami ramowymi.

Wartości reakcji wyliczone z warunków równowagi układu jako całości pokazane są na rysunku obok.

W tym przykładzie wartości sił przekrojowych w punktach charakterystycznych wyznaczmy postępując inaczej niż poprzednio. Nie będziemy wycinać poszczególnych części układu ale dokonywać przecięć konstrukcji, zaczepiać odpowiednich sił przekrojowych i wyznaczać je z warunków zerowania się momentów w odpowiednich przegubach.



Zacniemy od przecięcia prętów 2-B i 1-2 w odległości dowolnie bliskiej przegubu 2. Po dokonaniu przecięcia należy zaczepić w przekrojach odpowiednie siły przekrojowe (patrz rys), będą to siła poprzeczna i podłużna (nie będzie momentu zginającego, bo przecięcie dokonane jest nieskończenie blisko przegubu).



Po usunięciu przegubu 2 z konstrukcji mamy sytuację pokazaną obok na rysunku. Wartości sił poprzecznych  $Q_{2B}$  i  $Q_{2C}$  możemy wyznaczyć z warunków równowagi:

- części 2-B

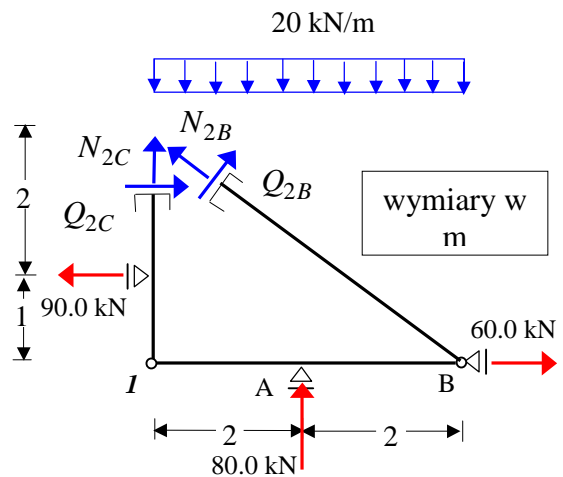
$$\sum M_B = 0;$$

$$Q_{2B} * 5 - 20 * 4 * 2 = 0 \rightarrow Q_{2B} = 32.0 \text{ kN},$$

- części 2-1

$$\sum M_1 = 0;$$

$$Q_{2C} * 3 - 90 * 1 = 0 \rightarrow Q_{2C} = 30.0 \text{ kN}.$$

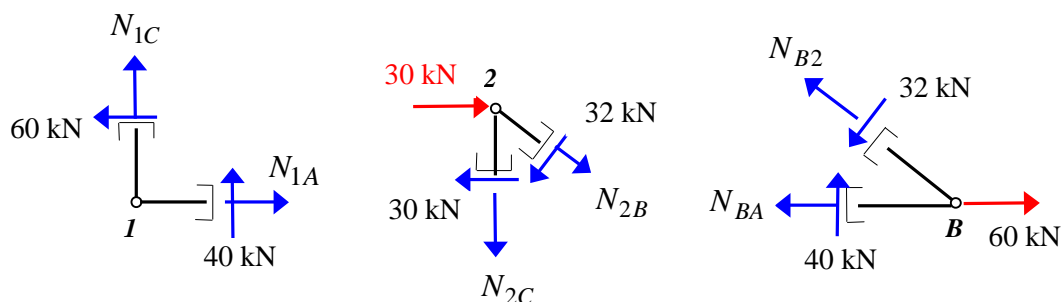


Postępując analogicznie z przegubami 1 oraz B otrzymamy wartości następujących sił poprzecznych:

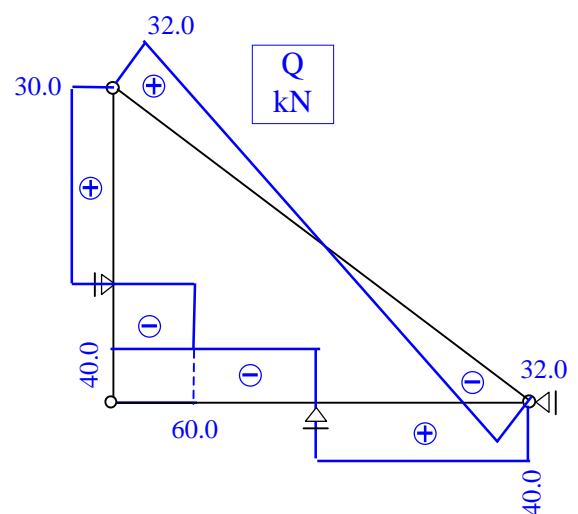
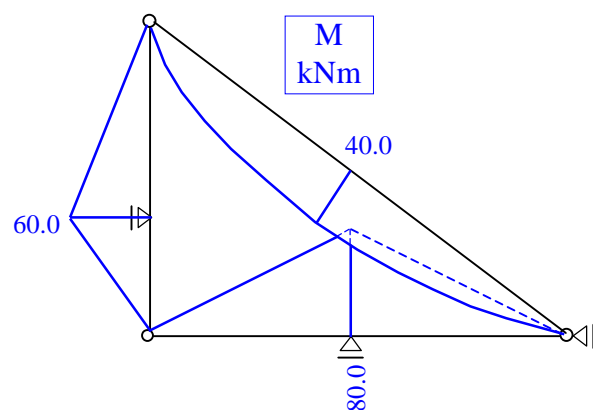
$$Q_{1A} = -40.0 \text{ kN}, Q_{1C} = -60.0 \text{ kN}, Q_{BA} = 40.0 \text{ kN}, Q_{B2} = -32.0 \text{ kN}.$$

Z warunków równowagi sił działających na węzły 1, 2 i B (patrz wysunki) otrzymamy następujące wartości sił podłużnych:

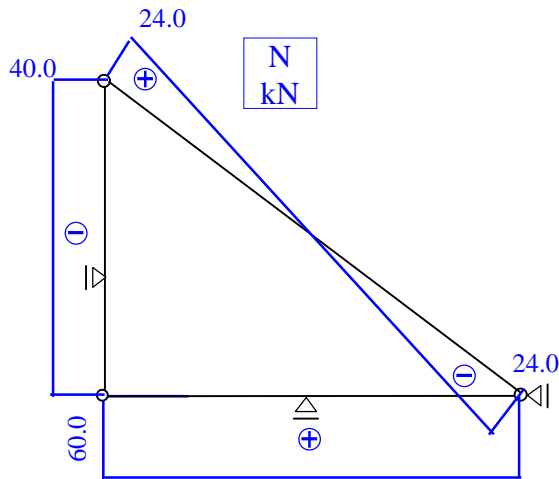
$$N_{1A} = N_{BA} = 60.0 \text{ kN}, N_{1C} = N_{2C} = -40.0 \text{ kN}, N_{B2} = -24.0 \text{ kN}, N_{2B} = 24.0 \text{ kN}.$$



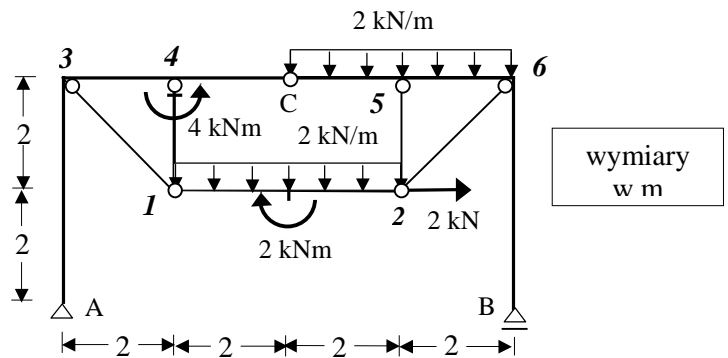
Wykresy sił przekrojowych pokazane są niżej.







**Przykład 1.6.** Rozwiązać układ złożony.



### Rozwiązanie

Zasadniczą część konstrukcji stanowią dwie części ramowe  $A-3-C$  i  $C-6-B$  podparte na podporach  $A$  oraz  $B$  i spięte poprzez przeguby układem prętów ramowych i kratowych zapewniających całemu układowi geometryczną niezmienną. Konstrukcja jest statycznie wyznaczalna.

Kolejność rozwiązywania:

- wyznaczenie reakcji z warunków równowagi całego układu,
- wyznaczenie siły poprzecznej  $Q_{14}$  w przęcie ramowym  $1-4$  z warunku zerowania się momentów względem przegubu  $4$  dolnej części pręta  $1-4$  po dokonaniu przekroju dowolnie blisko przegubu  $1$ :

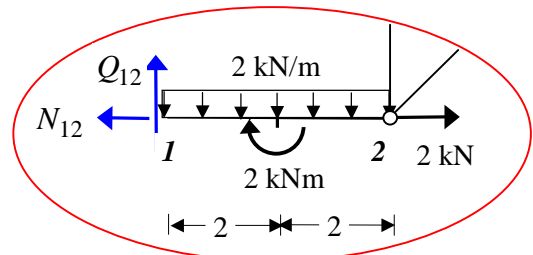
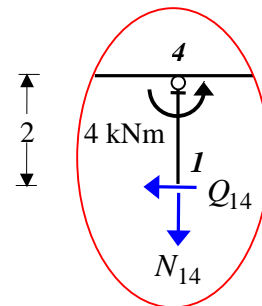
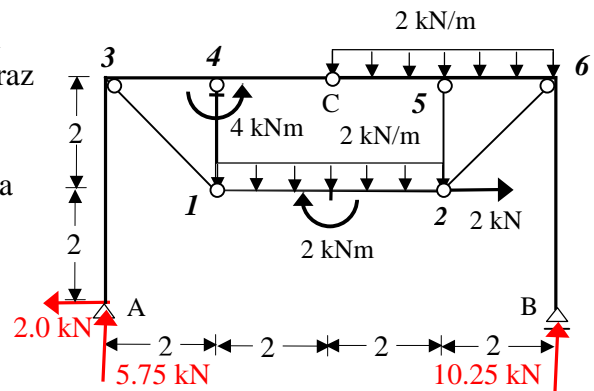
$$\sum M_4 = 0; Q_{14} * 2 - 4 = 0 \rightarrow Q_{14} = 2.0 \text{ kN.}$$

- wyznaczenie siły poprzecznej  $Q_{12}$  w przęcie ramowym  $1-2$  z warunku zerowania się momentów względem przegubu  $2$  po dokonaniu przekroju dowolnie blisko przegubu  $1$ , a następnie siły poprzecznej  $Q_{21}$  z sumowania sił pionowych działających na ten pręt:

$$\sum M_2 = 0;$$

$$Q_{12} * 4 + 2 - 2 * 4 * 2 = 0 \rightarrow Q_{12} = 3.5 \text{ kN.}$$

$$\sum Y = 0; Q_{21} = Q_{12} - 2 * 4 = -4.5 \text{ kN.}$$

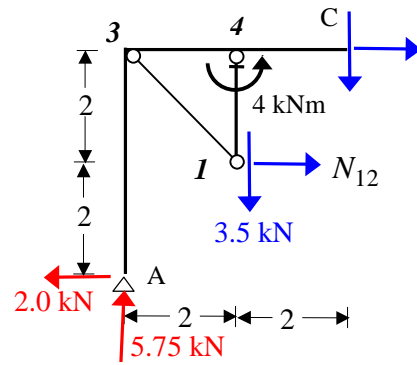


- wyznaczenie siły podłużnej  $N_{12}$  w przecie ramowym  $I-2$  z warunku zerowania się momentów względem przegubu  $C$  lewej części konstrukcji po dokonaniu przekroju przez przegub  $C$  i dowolnie blisko przegubu  $I$ :

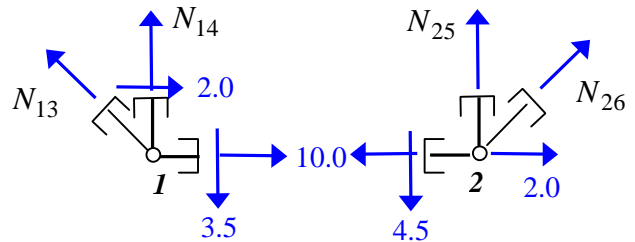
$$\sum M_C = 0;$$

$$N_{12} * 2 + 3.5 * 2 + 4 - 2 * 4 - 5.75 * 4 = 0 \rightarrow$$

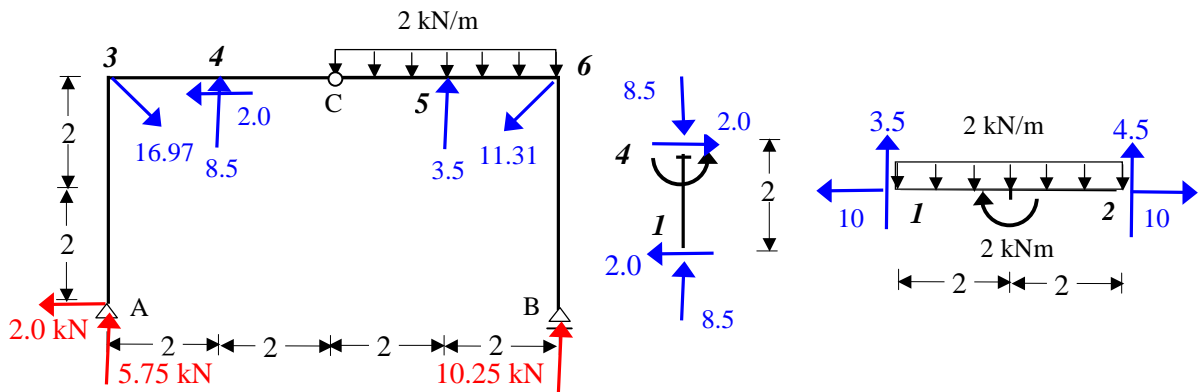
$$N_{12} = 10.0 \text{ kN.}$$



- z warunków równowagi węzła  $I$  i  $2$  wyznaczamy nieznanne siły podłużne w schodzących się w nich prętach:  $N_{13} = 16.97 \text{ kN}$ ,  $N_{14} = -8.50 \text{ kN}$ ,  $N_{25} = -3.50 \text{ kN}$ ,  $N_{26} = 11.31 \text{ kN}$ .



W rezultacie siły przykładane do prętów ramowych pokazane są na rysunkach niżej:



Wykresy sił przekrojowych można wykonać samodzielnie.