

P R O J E K T N R 1

Z

WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Zawiera:

**Wyznaczenie wymiarów przekroju poprzecznego belki
zginanej poprzecznie**

**Jan Nowak
Rok III Studia Zaoczne
Grupa 311/A**

P R O J E K T 1 Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Stud. **Jan Nowak**

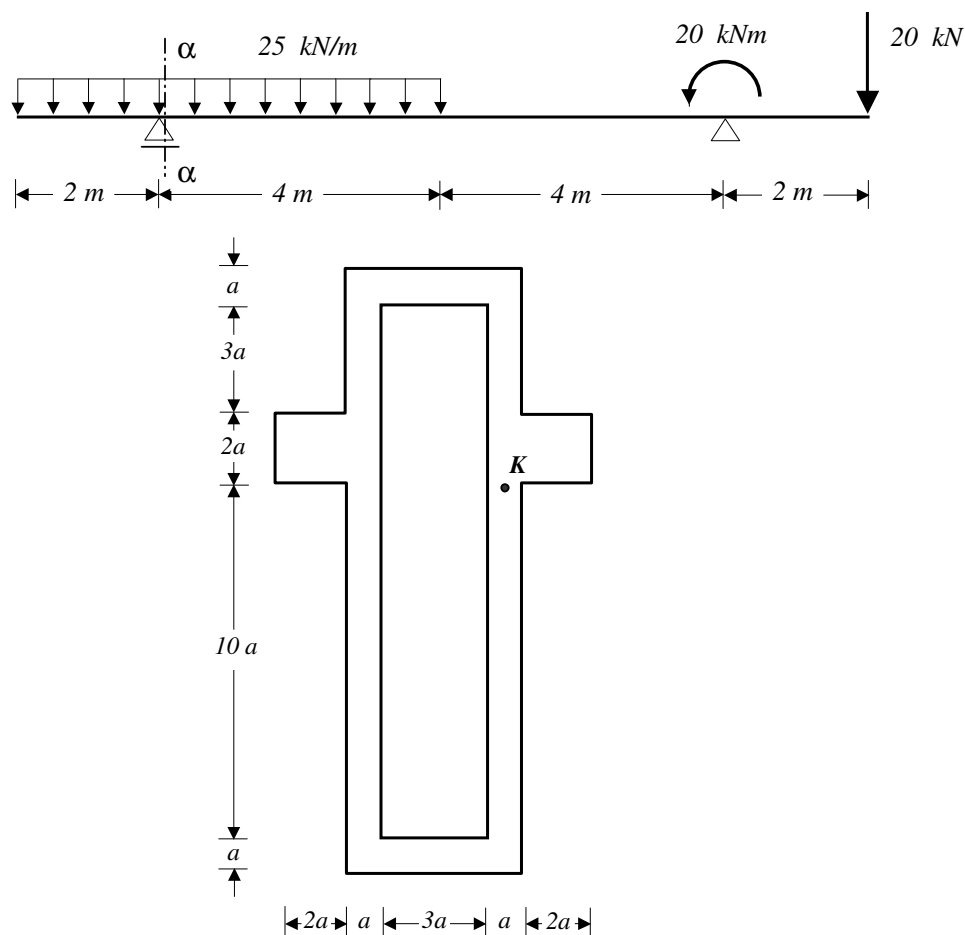
III rok Studia Zaoczne, sem. zim., rok ak. 2005/06.

Zaprojektować wymiary przekroju poprzecznego zginanej belki ze względu na stan graniczny nośności i użytkowania.

Po zaprojektowaniu wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych i stycznych w przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ oraz obliczyć naprężenia główne i ich kierunki w punkcie **K** tego przekroju.

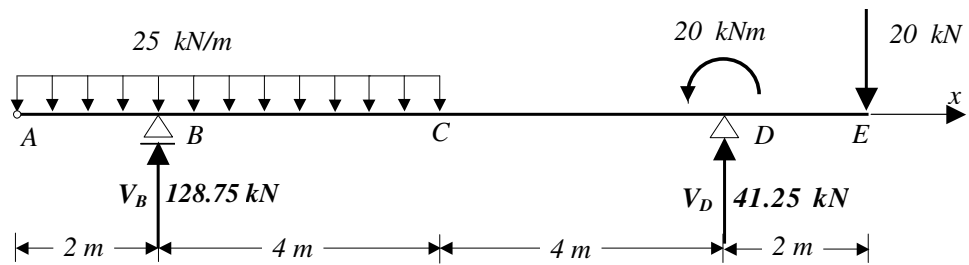
Otrzymane wyniki sprawdzić programami komputerowymi STATYKA i PRZEKRÓJ, załączyć wydruki rezultatów obliczeń.

$R=205 \text{ MPa}$, $R_t=0.6 R$, $f_{dop}=l_{max}/250$, $E=205 \text{ GPa}$



Podpis prowadzącego ćwiczenia

1. Rozwiązanie belki



1.1. Obliczenie reakcji

$$\sum M_B = 0; \quad V_D * 8 - 20 * 10 + 20 - 25 * 6 * 1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_D = 41.250 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0; \quad V_A * 8 - 25 * 6 * 7 - 20 + 20 * 2 = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = 128.750 \text{ kN}$$

Sprawdzenie obliczenia reakcji; $\sum V = V_B + V_D - 25 * 6 - 20 = 0$

1.2. Obliczenie wartości momentów zginających i sił poprzecznych

$$M_A = 0, \quad M_B = -25 * 2 * 1 = -50.000 \text{ kNm}, \quad M_C = -25 * 6 * 3 + 128.75 * 4 = 65.000 \text{ kNm},$$

$$M_E = 0, \quad M_{DE} = -20 * 2 = -40.000 \text{ kNm}, \quad M_{DC} = -20 * 2 + 20 = -20.000 \text{ kNm}$$

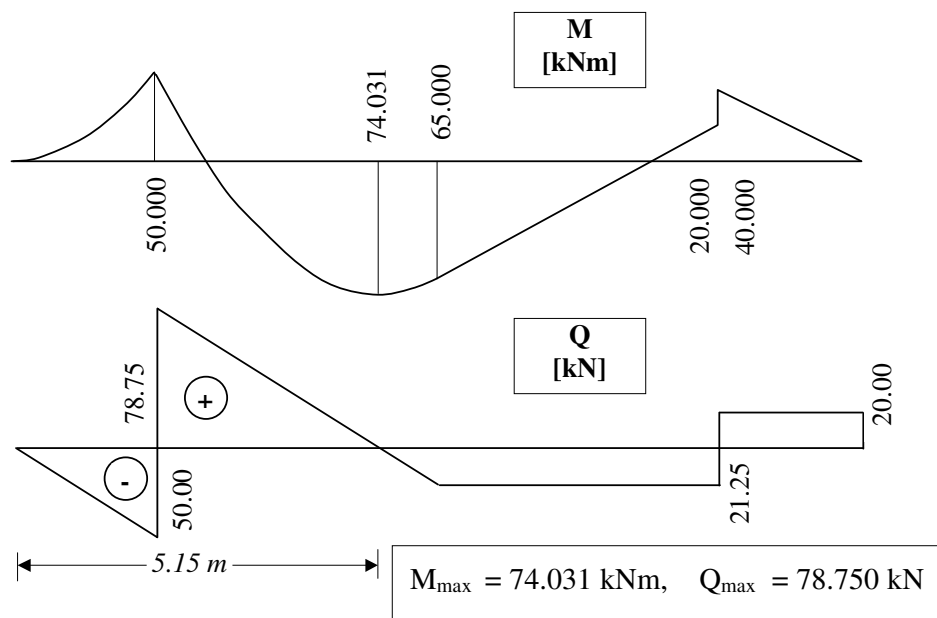
$$Q_A = 0, \quad Q_{BA} = -25 * 2 = -50.000 \text{ kN}, \quad Q_{BC} = -25 * 2 + 128.75 = 78.750 \text{ kN},$$

$$Q_C = -25 * 6 + 128.75 = -21.250 \text{ kN}, \quad Q_{ED} = Q_{DE} = 20.000 \text{ kN}, \quad Q_{DC} = 20 - 41.25 = -21.250 \text{ kN}$$

Miejsce wystąpienia ekstremalnego momentu w przedziale BC: $-25 * x + 128.75 = 0 \rightarrow x = 5.15 \text{ m}$.

Wartość ekstremalnego momentu $M_{ekstr} = M(5.15) = -25 * 5.15^2 / 2 + 128.75 * 3.15 = 74.031 \text{ kNm}$.

1.3. Wykresy momentów zginających i sił poprzecznych



1.4 Results from program STATICS, version Nov 20 2000 10:02:15
az@limba.wil.pk.edu.pl (Adam Zaborski)

Data trace

Points	Elements (from-to) (hinges)	Constraints (point no) (code)	Loading
1 (0 , 0) [m]	1 (1 - 2) (none)	2) 2	vertical force 20 kN in point 5 point moment -20 kNm on element 4 (at origin) vertical load (25, 25) kN/m on element 1 vertical load (25, 25) kN/m on element 2
2 (2 , 0) [m]	2 (2 - 3) (none)	4) 3	
3 (6 , 0) [m]	3 (3 - 4) (none)		
4 (10 , 0) [m]	4 (4 - 5) (none)		
5 (12 , 0) [m]			

Results

Bearing reactions

$V_2 = -128.75 \text{ kN}$, $V_4 = -41.25 \text{ kN}$, $H_4 = 0$

Element no 1		Element no 2	
Bending moment: $M(x = 0) = 0$ $M(x = 2) = -50 \text{ kNm}$ Transversal force: $Q(x = 0) = 0$ $Q(x = 2) = -50 \text{ kN}$ Axial force: $N(x = 0) = 0$ $N(x = 2) = 0$	Nodal displacements: $\text{angle}(x = 0) = 106.667$ $dx(x = 0) = 0$ $dy(x = 0) = -230$ $\text{angle}(x = 2) = 140$ $dx(x = 2) = 0$ $dy(x = 2) = 0$ Maximal deflection: $w_{\text{max}}(x = 0) = -230$	Bending moment: $M(x = 0) = -50 \text{ kNm}$ $M(x = 4) = 65 \text{ kNm}$ $M_{\text{extr}}(x = 3.15) = 74.0312$, (global position: $x = 5.15 \text{ m}$, $y = 0$) Transversal force: $Q(x = 0) = 78.75 \text{ kN}$ $Q(x = 4) = -21.25 \text{ kN}$ Axial force: $N(x = 0) = 0$ $N(x = 4) = 0$	Nodal displacements: $\text{angle}(x = 0) = 140$ $dx(x = 0) = 0$ $dy(x = 0) = 0$ $\text{angle}(x = 4) = -23.3333$ $dx(x = 4) = 0$ $dy(x = 4) = 386.667$ Maximal deflection: $w_{\text{max}}(x = 3.64) = 390.707$

Element no 3		Element no 4	
Bending moment: $M(x = 0) = 65 \text{ kNm}$ $M(x = 4) = -20 \text{ kNm}$ Transversal force: $Q(x = 0) = -21.25 \text{ kN}$ $Q(x = 4) = -21.25 \text{ kN}$ Axial force: $N(x = 0) = 0$ $N(x = 4) = 0$	Nodal displacements: $\text{angle}(x = 0) = -23.3333$ $dx(x = 0) = 0$ $dy(x = 0) = 386.667$ $\text{angle}(x = 4) = -113.3333$ $dx(x = 4) = 0$ $dy(x = 4) = 0$ Maximal deflection: $w_{\text{max}}(x = 0) = 386.667$	Bending moment: $M(x = 0) = -40 \text{ kNm}$ $M(x = 2) = 0$ Transversal force: $Q(x = 0) = 20 \text{ kN}$ $Q(x = 2) = 20 \text{ kN}$ Axial force: $N(x = 0) = 0$ $N(x = 2) = 0$	Nodal displacements: $\text{angle}(x = 0) = -113.3333$ $dx(x = 0) = 0$ $dy(x = 0) = 0$ $\text{angle}(x = 2) = -73.3333$ $dx(x = 2) = 0$ $dy(x = 2) = 0$ Maximal deflection: $w_{\text{max}}(x = 2) = -173.333$

2. Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego

2.1. Wyznaczenie położenia głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego

Oś Z – oś symetrii

Pole powierzchni i środek ciężkości

$$F = 2 \cdot 2a \cdot 2a + 5a \cdot 17a - 3a \cdot 15a = 48.000a^2$$

$$S_{y1} = 2 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 3.5a = 28.000a^3$$

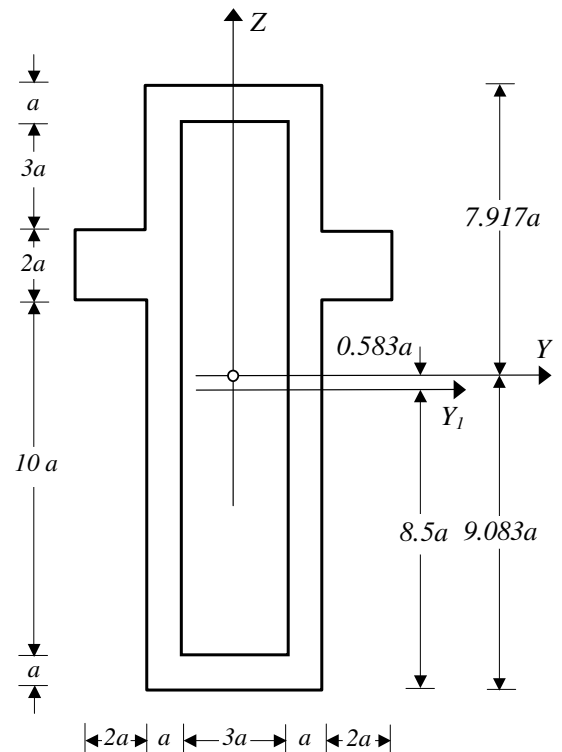
$$z_0 = S_{y1} / F = 28a^3 / 48a^2 = 0.583a$$

2.2. Moment bezwładności względem osi zginania

$$\begin{aligned} J_y &= 5a \cdot (17a)^3 / 12 - 3a \cdot (15a)^3 / 12 + 40a^2 \cdot (0.583a)^2 \\ &\quad + 2 \cdot [2a \cdot (2a)^3 / 12 + 2a \cdot 2a \cdot (3.5a - 0.583a)^2] = \\ &= 1287.666a^4 \end{aligned}$$

2.3. Wskaźnik wytrzymałości

$$W_y = J_y / |z|_{\max} = 1287.666 / 9.083a = 141.767a^3$$



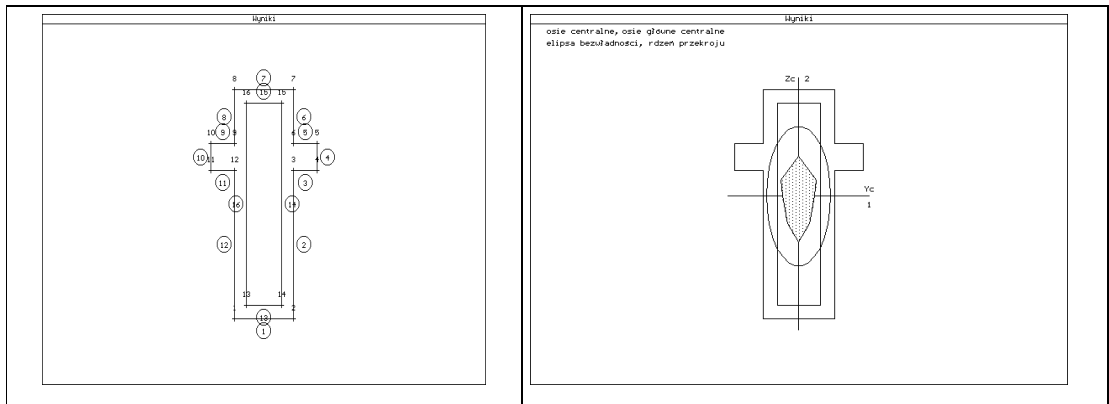
2.4 Wyniki z programu PRZEKROJ, wersja Mar 06 2002 19:01:39 az@limba.wil.pk.edu.pl (Adam Zaborski)

Dane

Punkty	Punkty	Elementy (od-do)	Elementy (od-do)
1 (2 , 0)	9 (2 , 13)	1 (1 - 2)	9 (9 - 10)
2 (7 , 0)	10 (0 , 13)	2 (2 - 3)	10 (10 - 11)
3 (7 , 11)	11 (0 , 11)	3 (3 - 4)	11 (11 - 12)
4 (9 , 11)	12 (2 , 12)	4 (4 - 5)	12 (12 - 1)
5 (9 , 13)	13 (3 , 1)	5 (5 - 6)	13 (13 - 14)
6 (7 , 13)	14 (6 , 1)	6 (6 - 7)	14 (14 - 15)
7 (7 , 17)	15 (6 , 16)	7 (7 - 8)	15 (15 - 16)
8 (2 , 17)	16 (3 , 16)	8 (8 - 9)	16 (16 - 13)

Wyniki

Pole = 48 Środek ciężkości: (4.5, 9.08333) Centralne momenty bezwładności: $I_y = 1287.67$ $I_z = 244$ $I_{yz} = 0$	Główne centralne momenty bezwładności: $I_1 = 1287.67$ $I_2 = 244$ kąt = 0 [deg]
--	---



3. Projektowanie ze względu na stan graniczny nośności.

3.1. Projektowanie ze względu na naprężenia normalne w przekroju poprzecznym.

Największe naprężenia normalne wystąpią w przekroju maksymalnego momentu zginającego we włókach najdalej położonych od osi obojętnej.

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq R \rightarrow W_y = \frac{M_{max}}{R} \rightarrow 141.767a^3 \geq \frac{74.031 \cdot 10^3}{205 \cdot 10^6}$$

$$a \geq 1.366 \cdot 10^{-2} [m]$$

3.2. Projektowanie ze względu na naprężenia styczne w przekroju poprzecznym.

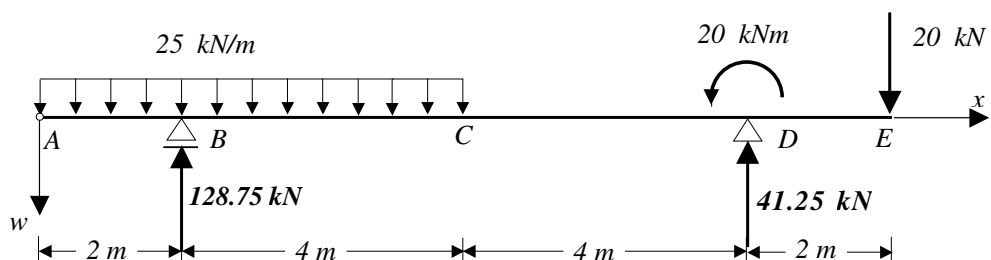
Największe naprężenie styczne wystąpią w przekroju maksymalnej siły poprzecznej we włókach na osi obojętnej

$$S_y(0) = 9.083a \cdot 5a \cdot 9.083a / 2 - 8.083a \cdot 3a \cdot 8.083a / 2 = 108.250a^3$$

$$\tau_{xz_{max}} = \frac{Q_{max} \cdot S_y(0)}{J_y \cdot b(0)} \leq R_t \rightarrow \frac{78.750 \cdot 10^3 \cdot 108.250a^3}{1287.666a^4 \cdot 2a} \leq 123 \cdot 10^6$$

$$a \geq 0.519 \cdot 10^{-2} [m]$$

4. Wyznaczenie linii ugięcia belki.



Linie ugięcia belki wyznaczymy korzystając z podejścia Clebscha dzięki czemu liczba stałych całkowania zredukuje się do dwóch, niezależnie od ilości przedziałów charakterystycznych.

$$\begin{aligned}
 M(x) &= & -25x^2/2 & \Big|^{AB} + 128.75(x-2) & \Big|^{BC} + 25(x-6)^2/2 & \Big|^{CD} - 20(x-10)^0 + 41.25(x-10) & \Big|^{DE} \\
 EJw''(x) &= & +25x^2/2 & \Big| & - 128.75(x-2) & \Big| & - 25(x-6)^2/2 & \Big| & + 20(x-10)^0 - 41.25(x-10) & \Big| \\
 EJw'(x) &= & C + 25x^3/6 & \Big| & - 128.75(x-2)^2/2 & \Big| & - 25(x-6)^3/6 & \Big| & + 20(x-10) - 41.25(x-10)^2/2 & \Big| \\
 EJw(x) &= & D + Cx + 25x^4/24 & \Big| & - 128.75(x-2)^3/6 & \Big| & - 25(x-6)^4/24 & \Big| & + 20(x-10)^2/2 - 41.25(x-10)^3/6 & \Big|
 \end{aligned}$$

Kinematyczne warunki brzegowe:

$$1) w(2) = 0 \quad \rightarrow 0 = D + 2 \cdot C + 25 \cdot 2^4 / 24$$

$$2) w(10) = 0 \quad \rightarrow 0 = D + 10 \cdot C + 25 \cdot 10^4 / 24 - 128.75 \cdot (10-2)^3 / 6 - 25 \cdot (10-6)^4 / 24$$

$$\underline{C = 106.667 [kNm^2]}; \quad \underline{D = -230.000 [kNm^3]}$$

Ugięcia i kąty ugięcia w punktach charakterystycznych:

$$w'_A = w'(0) = 106.667 [kNm^2]/EJ; \quad w_A = w(0) = -230.000 [kNm^3]/EJ,$$

$$w'_B = w'(2) = 106.667 \cdot 667 + 25 \cdot 2^3 / 6 = 140.000 [kNm^2]/EJ; \quad w_B = w(2) = 0.001 \approx 0,$$

$$w'_C = w'(6) = 106.667 + 25 \cdot 6^3 / 6 - 128.75 \cdot (6-2)^2 / 2 = -23.333 [kNm^2]/EJ,$$

$$w_C = w(6) = -230.000 + 106.667 \cdot 6 + 25 \cdot 6^4 / 24 - 128.75 \cdot (6-2)^3 / 6 = 386.669 [kNm^3]/EJ,$$

$$w'_D = w'(10) = 106.667 + 25 \cdot 10^3 / 6 - 128.75 \cdot (10-2)^2 / 2 - 25 \cdot (10-6)^3 / 6 = -113.333 [kNm^2]/EJ,$$

$$w_D = w(10) = -230.000 + 106.667 \cdot 10 + 25 \cdot 10^4 / 24 - 128.75 \cdot (10-2)^3 / 6 - 25 \cdot (10-6)^4 / 24 = 0.003 \approx 0$$

$$w'_E = w'(12) = 106.667 + 25 \cdot 12^3 / 6 - 128.75 \cdot (12-2)^2 / 2 - 25 \cdot (12-6)^3 / 6 + 20(12-10) -$$

$$41.25 \cdot (12-10)^2 / 2 = -73.333 [kNm^2]/EJ,$$

$$w_E = w(12) = -230.000 + 106.667 \cdot 12 + 25 \cdot 12^4 / 24 - 128.75 \cdot (12-2)^3 / 6 - 25 \cdot (12-6)^4 / 24 +$$

$$20(12-10)^2 / 2 - 41.25 \cdot (12-10)^3 / 6 = -173.329 [kNm^3]/EJ.$$

4.1. Obliczenie maksymalnego ugięcia w belce.

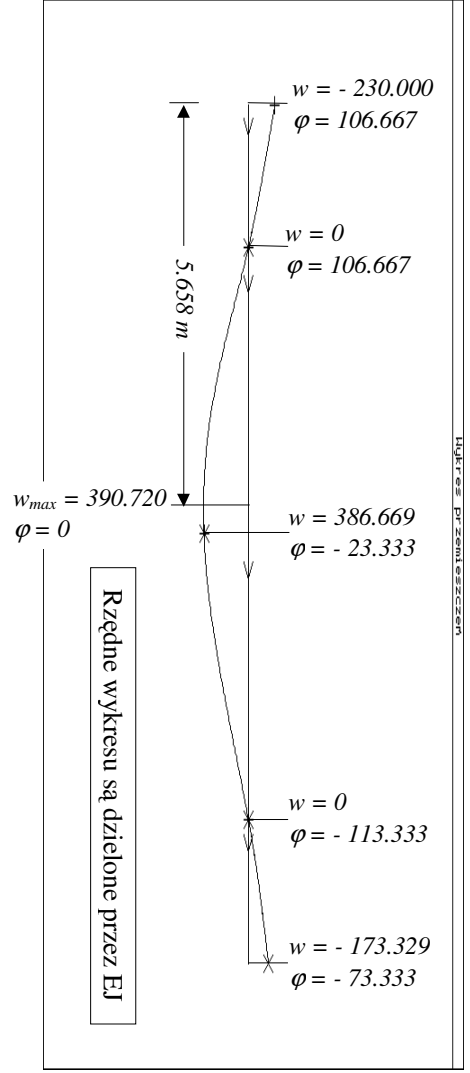
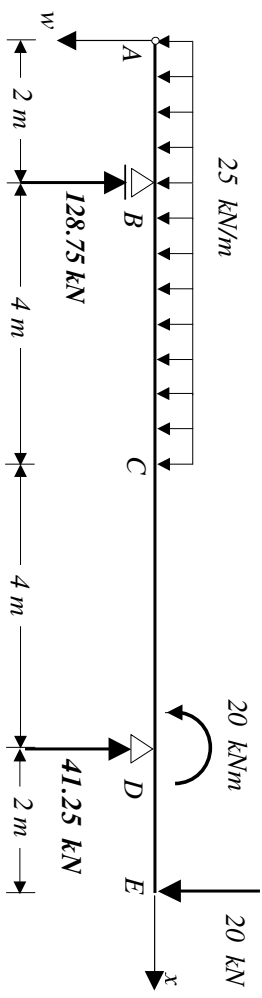
Maksymalne ugięcie wystąpi w przedziale BC w punkcie w którym zeruje się kąt ugięcia

$$106.667 + 25 \cdot x^3 / 6 - 128.75 \cdot (x-2)^2 / 2 = 0 \quad \rightarrow x = 5.658 [m]$$

$$106.667 + 25 \cdot 5.658^3 / 6 - 128.75 \cdot (5.658-2)^2 / 2 = -0.027 \approx 0$$

$$\underline{w_{max}} = w(5.658) = -230.000 + 106.667 \cdot 5.658 + 25 \cdot 5.658^4 / 24 - 128.75 \cdot (5.658-2)^3 / 6 =$$

$$\underline{390.720 [kNm^3]/EJ.}$$



4.2. Projektowanie ze względu na stan graniczny użytkowania

$$w_{dop} = \frac{l_{max}}{250} = \frac{8.000}{250} = 0.032 [m]$$

$$w_{max} \leq w_{dop} \rightarrow \frac{390.720 * 10^3}{EJ} \leq 0.032$$

$$1287.666 * a^4 \geq \frac{390.720 * 10^3}{205 * 10^9 * 0.032}$$

$$a \geq 1.466 * 10^{-2} [m]$$

5. Przyjęcie wymiarów przekroju belki.

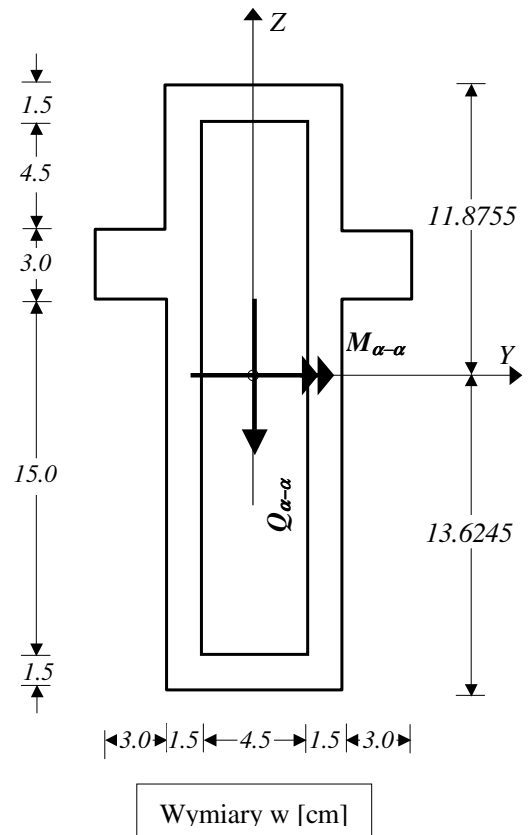
Punkty 3.1, 3.2, i 4.2 dowodzą, że o wymiarach przekroju poprzecznego decyduje stan graniczny użytkowania.

Do wykonania przyjęto $a = 1.50 * 10^{-2} [m]$.

6. Wyznaczenie rozkładu naprężeń normalnych i stycznych w przekroju $\alpha-\alpha$.

$$M_{\alpha-\alpha} = 50.000 [kNm]; \quad Q_{\alpha-\alpha} = 78.750 [kN]$$

$$J_y = 1287.666 a^4 = 1287.666 * (0.015)^4 = 6518.809 * 10^{-8} [m^4]$$



6.1. Wyznaczenie wartości naprężeń normalnych i stycznych

$$\sigma_x = \frac{M_{\alpha-\alpha}}{J_y} z = \frac{50.000 * 10^3}{6518.809 * 10^{-8}} z = 767.011 * 10^6 z [N / m^2]$$

$$\tau_{xz} = - \frac{Q_{\alpha-\alpha} * S_y(z)}{J_y * b(z)} = - \frac{78.750 * 10^3 * S_y(z)}{6518.809 * 10^{-8} * b(z)} = - 1208.043 * 10^6 \frac{S_y(z)}{b(z)} [N / m^2]$$

$$z = 11.876 * 10^{-2} m$$

$$\sigma_x = 91.090 [MPa]; \quad \tau_{xz} = 0$$

$$z = 10.376 * 10^{-2} m$$

$$\sigma_x = 79.585 [MPa]$$

$$S_y(z) = 7.5 * 1.5 * 11.126 * 10^{-6} = 125.167 * 10^{-6} [m^3]; \quad b(z) = 7.5 * 10^{-2} [m]$$

$$\tau_{xz} = - 2.016 [MPa]$$

$$S_y(z) = 7.5 * 1.5 * 11.126 * 10^{-6} = 125.167 * 10^{-6} [m^3]; \quad b(z) = 3.0 * 10^{-2} [m]$$

$$\tau_{xz} = - 5.040 [MPa]$$

$$\underline{z = 5.876 * 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\sigma_x = 45.070 \text{ [MPa]}$$

$$S_y(z) = 125.167 * 10^{-6} + 2 * 4.5 * 1.5 * 8.126 * 10^{-6} = 234.868 * 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}; \quad b(z) = 3.0 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\tau_{xz} = -9.458 \text{ [MPa]}$$

$$S_y(z) = 125.167 * 10^{-6} + 2 * 4.5 * 1.5 * 8.126 * 10^{-6} = 234.868 * 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}; \quad b(z) = 9.0 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\tau_{xz} = -3.153 \text{ [MPa]}$$

$$\underline{z = 2.876 * 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\sigma_x = 22.059 \text{ [MPa]}$$

$$S_y(z) = 234.868 * 10^{-6} + 2 * 4.5 * 3.0 * 4.376 * 10^{-6} = 353.020 * 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}; \quad b(z) = 9.0 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\tau_{xz} = -4.738 \text{ [MPa]}$$

$$S_y(z) = 234.868 * 10^{-6} + 2 * 4.5 * 3.0 * 4.376 * 10^{-6} = 353.020 * 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}; \quad b(z) = 3.0 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\tau_{xz} = -14.215 \text{ [MPa]}$$

$$\underline{z = 0}$$

$$\sigma_x = 0$$

$$S_y(z) = 353.020 * 10^{-6} + 2 * 2.876 * 1.5 * 1.438 * 10^{-6} = 365.427 * 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}; \quad b(z) = 3.0 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\tau_{xz} = -14.715 \text{ [MPa]}$$

$$\underline{z = -12.124 * 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\sigma_x = -92.992 \text{ [MPa]}$$

$$S_y(z) = 7.5 * 1.5 * 12.874 * 10^{-6} = 144.832 * 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}; \quad b(z) = 3.0 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\tau_{xz} = -5.832 \text{ [MPa]}$$

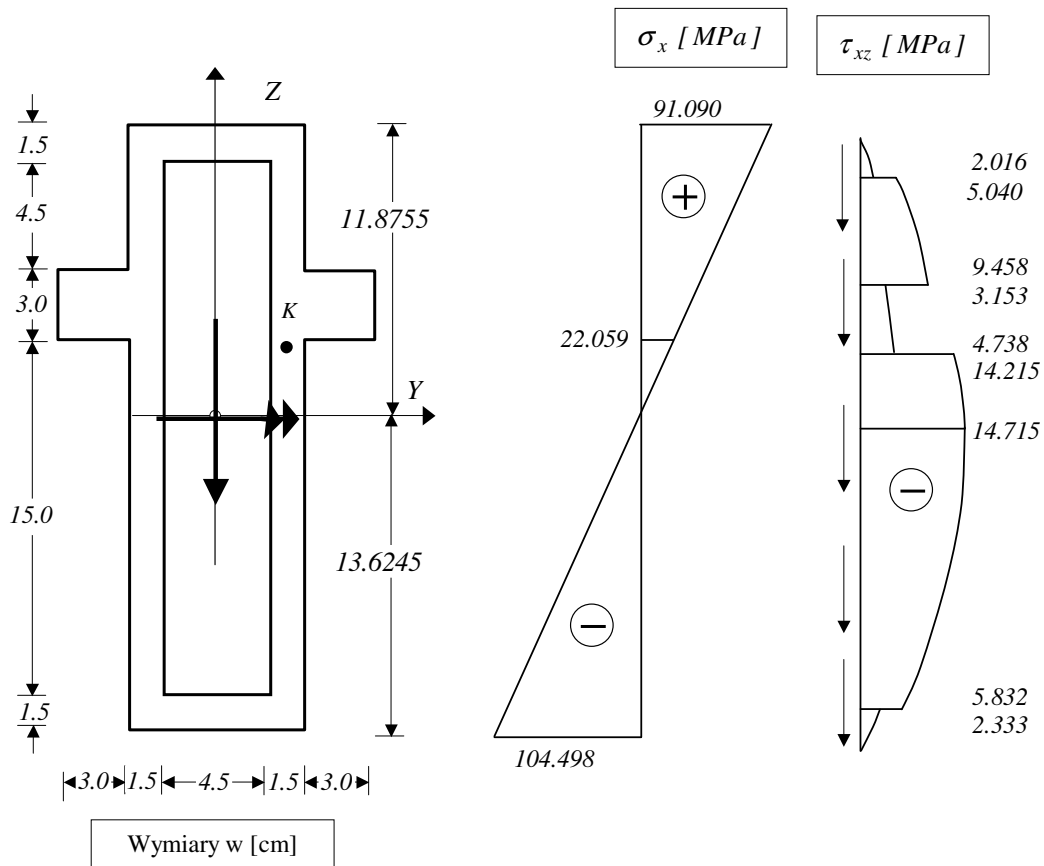
$$S_y(z) = 7.5 * 1.5 * 12.874 * 10^{-6} = 144.832 * 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}; \quad b(z) = 7.5 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\tau_{xz} = -2.333 \text{ [MPa]}$$

$$\underline{z = -13.624 * 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\sigma_x = -104.498 \text{ [MPa]}; \quad \tau_{xz} = 0$$

6.2 Rozkład naprężeń normalnych i stycznych w przekroju poprzecznym $\alpha-\alpha$



6.3 Wyniki z programu PRZEKROJ, wersja Mar 06 2002 19:01:39 az@limba.wil.pk.edu.pl (Adam Zaborski)

Dane

Punkty	Punkty	Elementy (od-do)	Elementy (od-do)
1 (0.030 , 0)	9 (0.030 , 0.195)	1 (1 - 2)	9 (9 - 10)
2 (0.105 , 0)	10 (0 , 0.195)	2 (2 - 3)	10 (10 - 11)
3 (0.105 , 0.165)	11 (0 , 0.165)	3 (3 - 4)	11 (11 - 12)
4 (0.135 , 0.165)	12 (0.030 , 0.165)	4 (4 - 5)	12 (12 - 1)
5 (0.135 , 0.195)	13 (0.045 , 0.015)	5 (5 - 6)	13 (13 - 14)
6 (0.105 , 0.195)	14 (0.090 , 0.015)	6 (6 - 7)	14 (14 - 15)
7 (0.105 , 0.255)	15 (0.090 , 0.240)	7 (7 - 8)	15 (15 - 16)
8 (0.030 , 0.255)	16 (0.045 , 0.240)	8 (8 - 9)	16 (16 - 13)

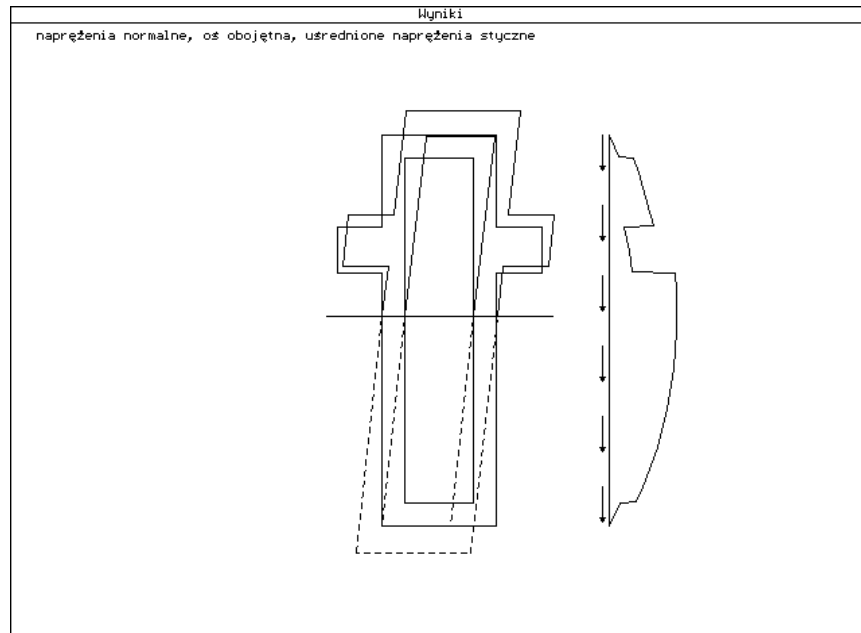
Obciążenia:

Siła poprzeczna = 78750 N moment = 50000 Nm, kat = 0 [deg]

Wyniki

Pole = 0.0108 m ² Środek ciężkości: (0.0675 , 0.13625) m	Główne centralne momenty bezwładności: I ₁ = I _y = 6.51881e-05 m ⁴ ; I ₂ = I _z = 1.23525e-05 m ⁴ kąt = 0 [deg]
---	--

Punkty	Naprężenia normalne [Pa]	Punkty	Naprężenia styczne [Pa]
1	-1.04505e+08	15 – 16	-2.01579e+06
3	2.20516e+07		-5.03993e+06
5	4.50619e+07	5 – 6	-9.45663e+06
7	9.10825e+07		-3.15231e+06
		3 – 4	-1.42134e+07
			-4.73776e+06
		13 – 14	-5.83272e+06
			-2.33288e+06



7. Obliczenie naprężeń głównych i ich kierunków w punkcie K przekroju $\alpha-\alpha$

$$T_{\sigma}^K = \begin{pmatrix} 22.059 & -14.215 \\ -14.215 & 0 \end{pmatrix} [MPa]$$

$$\sigma_{\max/\min}^K = \frac{\sigma_x^K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^K}{2}\right)^2 + (\tau_{xz}^K)^2} = \frac{22.059}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{22.059}{2}\right)^2 + (-14.215)^2}$$

$$\sigma_{\max}^K = 29.022 \text{ [MPa]}; \quad \sigma_{\min}^K = -6.963 \text{ [MPa]}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{\tau_{xz}^K}{\sigma_{\max}^K} = \frac{-14.215}{29.022} = -0.4849 \rightarrow \alpha_{\max} = -26.096^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{\tau_{xz}^K}{\sigma_{\min}^K} = \frac{-14.215}{-6.963} = 2.0415 \rightarrow \alpha_{\min} = 63.903^\circ$$

7.1 Naprężenia główne i ich kierunki w punkcie K przekroju poprzecznego α - α

