

**P R O J E K T   N R   2**

**Z**

**WYTRZYMAŁOŚCI   MATERIAŁÓW**

**Zawiera:**

- 1.Wyznaczenie rozkładu naprężeń normalnych w przekroju pręta obciążonego mimośrodowo**
- 2.Wyznaczenie rdzenia przekroju**

**Jan Kowalski  
Rok III Studia Zaoczne  
Grupa 312/A**

## PROJEKT NR 2 Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Stud. **Jan Kowalski**

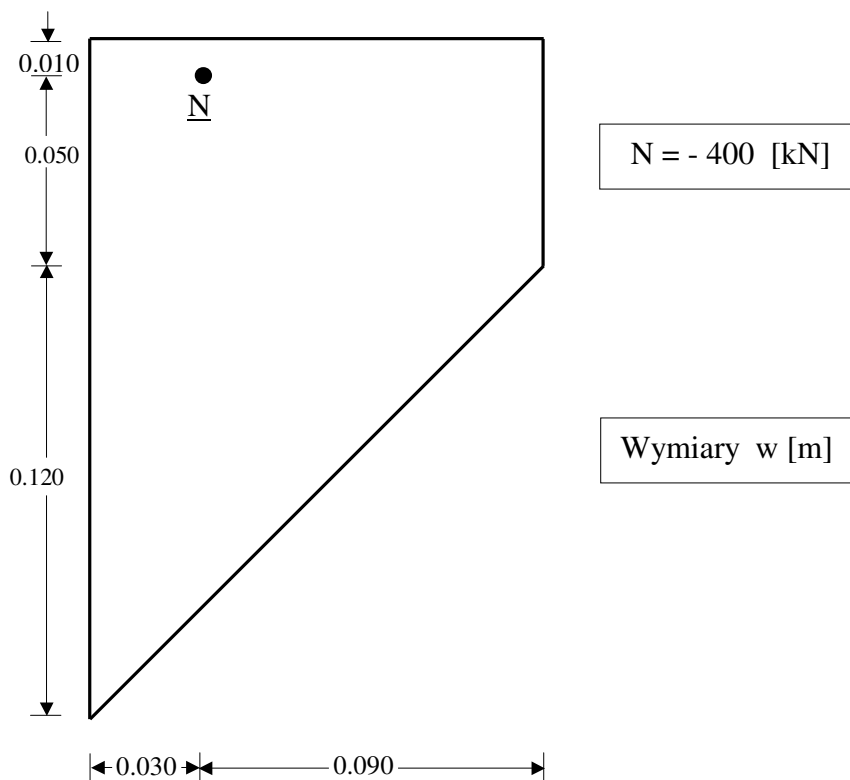
III rok Studia Zaoczne, sem. zim., rok ak.2005/6.

Dla podanego przekroju wyznaczyć:

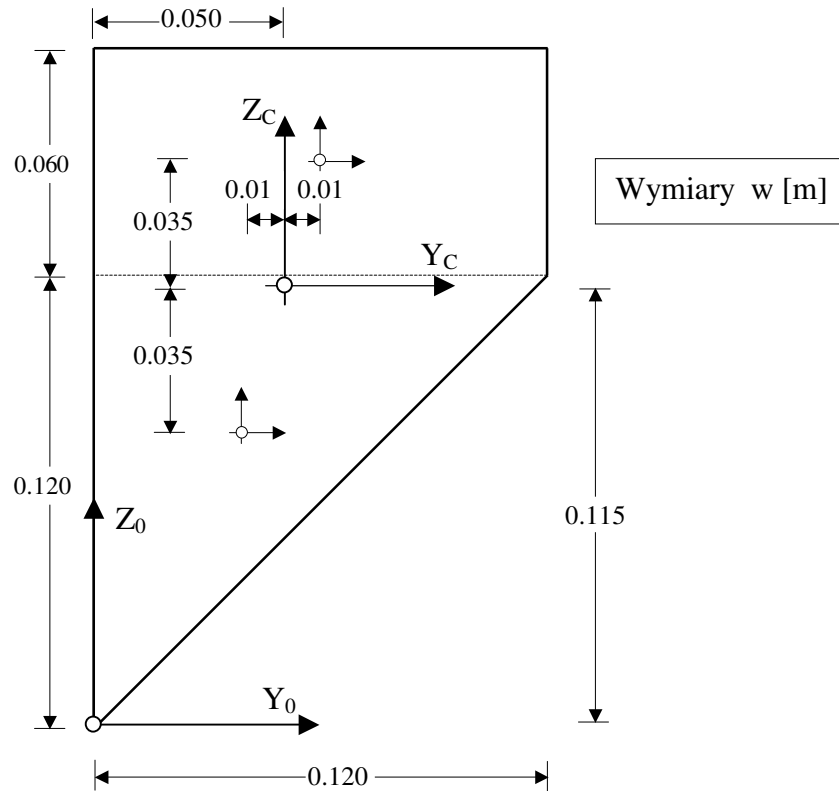
1/ rozkład naprężeń normalnych i położenie osi obojętnej w przekroju poprzecznym pręta obciążonego mimośrodowo,

2/ rdzeń tego przekroju.

Otrzymane wyniki sprawdzić programem komputerowym PRZEKROJ i załączyć wydruki rezultatów obliczeń.



Podpis prowadzącego ćwiczenia



## 1. Charakterystyki geometryczne przekroju

### 1.1. Pole powierzchni i środek ciężkości

$$\begin{aligned}
 F &= 0.12 \cdot 0.06 + 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 = 144 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]} \\
 S_{y_0} &= 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.15 + 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot 0.08 = 1656 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]} \\
 S_{z_0} &= 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.06 + 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot 0.04 = 720 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]} \\
 y_0 &= S_{z_0} / F = 720 \cdot 10^{-6} / 144 \cdot 10^{-4} = 0.050 \text{ [m]} \\
 z_0 &= S_{y_0} / F = 1656 \cdot 10^{-6} / 144 \cdot 10^{-4} = 0.115 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

### 1.2. Momenty bezwładności względem osi centralnych

$$\begin{aligned}
 J_{y_c} &= 0.12 \cdot 0.06^3 / 12 + 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.035^2 + 0.12 \cdot 0.12^3 / 36 + \\
 &\quad 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot (-0.035)^2 = 2556 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} \\
 J_{z_c} &= 0.06 \cdot 0.12^3 / 12 + 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.01^2 + 0.12 \cdot 0.12^3 / 36 + \\
 &\quad 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot (-0.01)^2 = 1584 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} \\
 J_{y_c z_c} &= 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.035 \cdot 0.01 + 0.12^2 \cdot 0.12^2 / 72 + \\
 &\quad 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot (-0.035) \cdot (-0.01) = 792 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}
 \end{aligned}$$

### 1.3. Oś główne centralne i momenty bezwładności względem tych osi

$$J_{1,2} = \frac{J_{y_c} + J_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{z_c}}{2}\right)^2 + J_{y_c z_c}^2} = \frac{2556 \cdot 10^{-8} + 1584 \cdot 10^{-8}}{2} \pm$$

$$\sqrt{\left(\frac{2556 \cdot 10^{-8} - 1584 \cdot 10^{-8}}{2}\right)^2 + (792 \cdot 10^{-8})^2}$$

$$J_1 = J_y = 2999.23 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} ; \quad i_y^2 = J_y / F = 20.828 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$J_2 = J_z = 1140.77 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} ; \quad i_z^2 = J_z / F = 7.922 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

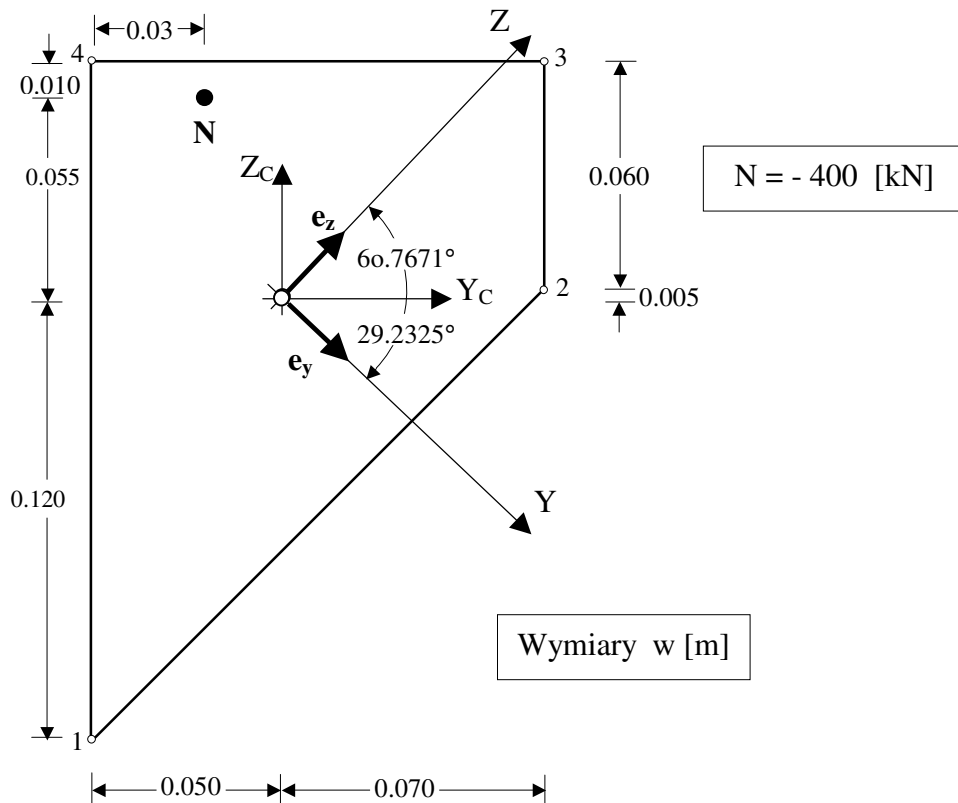
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{yzc}}{J_{zc} - J_1} = \frac{792}{1584 - 2999.23} = -0.5596 \rightarrow \alpha_1 = -29.2335^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{yzc}}{J_{zc} - J_2} = \frac{792}{1584 - 1140.77} = 1.7869 \rightarrow \alpha_2 = 60.7671^\circ$$

Sprawdzenia

$$J_{yc} + J_{zc} = J_y + J_z = (2556 + 1584) \cdot 10^{-8} = (2999.23 + 1584) \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 29.2335^\circ + 60.7671^\circ = 89.9996^\circ \approx 90^\circ$$



## 2. Wyznaczenie rozkładu naprężeń normalnych

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{N z_N}{J_y} z + \frac{N y_N}{J_z} y$$

### 2.1. Współrzędne punktów w układzie osi głównych centralnych (y,z)

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-29.2325^\circ) & \sin(-29.2325^\circ) \\ \cos 60.7671^\circ & \sin 60.7671^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8726 & -0.4884 \\ 0.4884 & 0.8726 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

Współrzędne [10 <sup>-2</sup> m]	Punkty				
	N	1	2	3	4
y <sub>c</sub>	-2.000	-5.000	7.000	7.000	-5.000
z <sub>c</sub>	5.500	-11.500	0.500	6.500	6.500
y	-4.431	1.254	5.864	2.934	-7.538
z	3.823	-12.477	3.855	9.091	3.230

## 2.2. Wartości naprężeń normalnych

$$\sigma_x = \frac{-400 * 10^3}{144 * 10^{-4}} + \frac{(-400 * 10^3) * 3.823 * 10^{-2}}{2999.23 * 10^{-8}} z + \frac{(-400 * 10^3) * (-4.431 * 10^{-2})}{1140.77 * 10^{-8}} y$$

$$\sigma_x = -27.778 * 10^6 - 509.864 * 10^6 * z + 1553.687 * 10^6 * y$$

$$\sigma_{x1} = [-27.778 - 509.864 * (-12.477 * 10^{-2}) + 1553.687 * 1.254 * 10^{-2}] * 10^6 = 55.321 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{x2} = [-27.778 - 509.864 * 3.855 * 10^{-2} + 1553.687 * 5.864 * 10^{-2}] * 10^6 = 43.675 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{x3} = [-27.778 - 509.864 * 9.091 * 10^{-2} + 1553.687 * 2.934 * 10^{-2}] * 10^6 = -28.545 \text{ [MPa]}$$

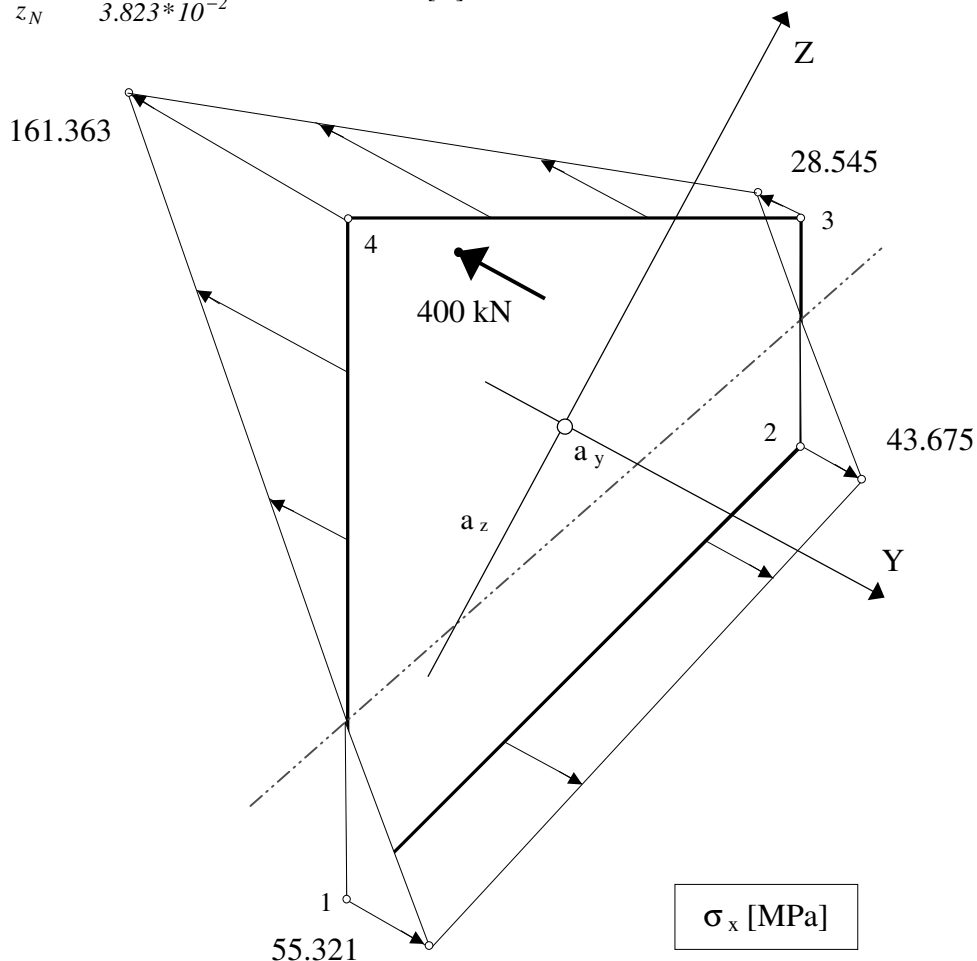
$$\sigma_{x4} = [-27.778 - 509.864 * 3.230 * 10^{-2} + 1553.687 * (-7.538 * 10^{-2})] * 10^6 = -161.363 \text{ [MPa]}$$

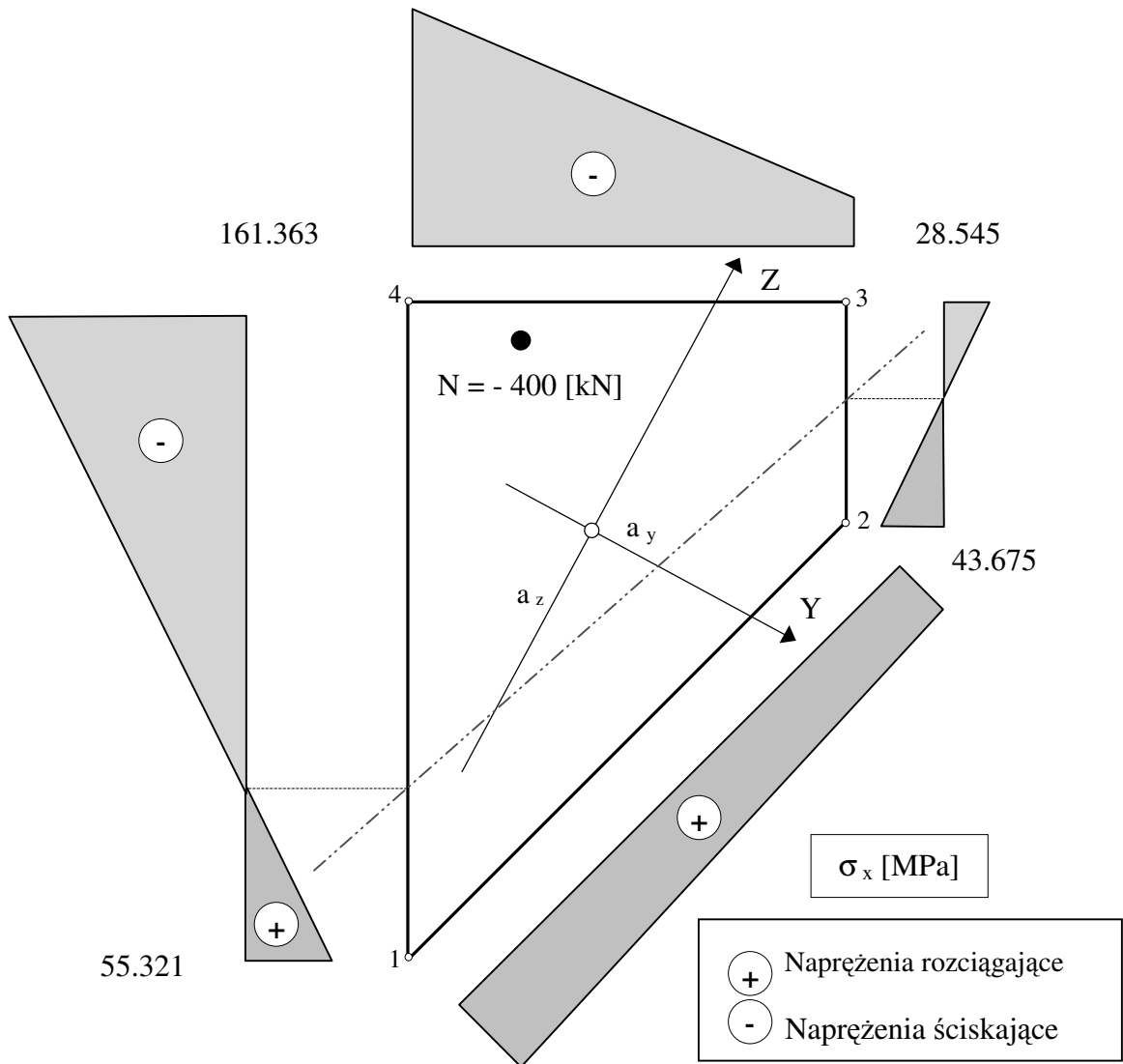
## 2.3. Oś obojętna

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1$$

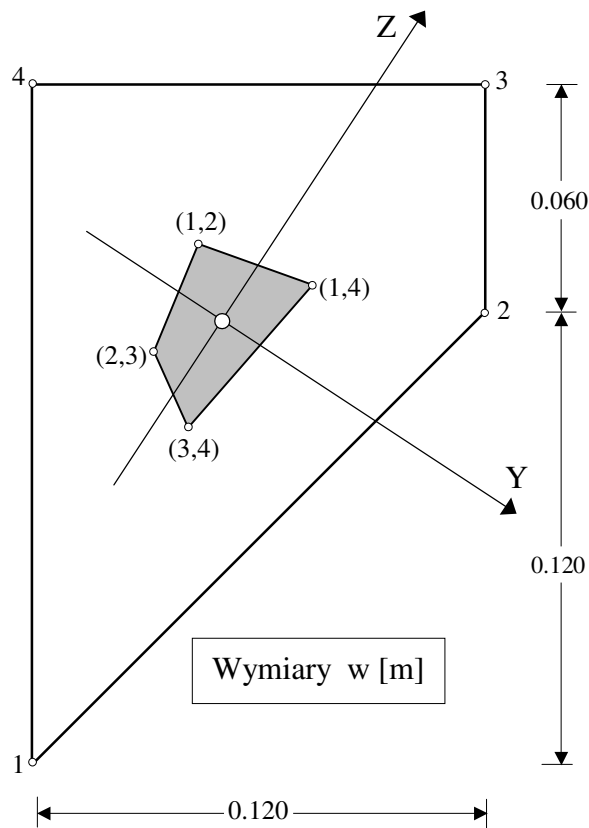
$$a_y = \frac{-i_z^2}{y_N} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{-4.431 * 10^{-2}} = 1.788 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$a_z = \frac{-i_y^2}{z_N} = \frac{-20.828 * 10^{-4}}{3.823 * 10^{-2}} = -5.448 * 10^{-2} \text{ [m]}$$





### 3. Wyznaczenie rdzenia przekroju



#### 3.1. Współrzędne punktów konturu przekroju

Współrzędne [10 <sup>-2</sup> m]	Punkty			
	1	2	3	4
y	1.254	5.864	2.934	-7.538
z	-12.477	3.855	9.091	3.230

#### 3.2. Wyznaczenie punktów krzywej rdzeniowej

$$y = \frac{-i_z^2}{a_y}; \quad z = \frac{-i_y^2}{a_z}$$

Przy wyznaczaniu  $a_y$  i  $a_z$  wykorzystujemy równanie prostej przez dwa punkty

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} (y - y_1)$$

#### Styczna 1-2

$$z + 12.477 * 10^{-2} = \frac{3.855 + 12.477}{5.864 - 1.254} (y - 1.254 * 10^{-2}); \quad z = 3.543y - 16.920 * 10^{-2}$$

$$a_y = 4.776 * 10^{-2} [m]; \quad a_z = -16.920 * 10^{-2} [m]$$

$$y_{1,2} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{4.776 * 10^{-2}} = -1.659 * 10^{-2} [m]; \quad z_{1,2} = \frac{-20.828 * 10^{-4}}{-16.920 * 10^{-2}} = 1.231 * 10^{-2} [m]$$

### Styczna 2-3

$$z - 3.855 * 10^{-2} = \frac{9.091 - 3.855}{2.934 - 5.864} (y - 5.864 * 10^{-2}); \quad z = -1.787y + 14.334 * 10^{-2}$$

$$a_y = 8.021 * 10^{-2} [m]; \quad a_z = 14.334 * 10^{-2} [m]$$

$$y_{2,3} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{8.021 * 10^{-2}} = -0.988 * 10^{-2} [m]; \quad z_{2,3} = \frac{-20.828 * 10^{-4}}{14.334 * 10^{-2}} = -1.453 * 10^{-2} [m]$$

### Styczna 3-4

$$z - 9.091 * 10^{-2} = \frac{3.230 - 9.091}{-7.538 - 2.934} (y - 2.934 * 10^{-2}); \quad z = 0.560y + 7.449 * 10^{-2}$$

$$a_y = -13.302 * 10^{-2} [m]; \quad a_z = 7.449 * 10^{-2} [m]$$

$$y_{3,4} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{-13.302 * 10^{-2}} = 0.596 * 10^{-2} [m]; \quad z_{3,4} = \frac{-20.828 * 10^{-4}}{7.449 * 10^{-2}} = -2.796 * 10^{-2} [m]$$

### Styczna 1-4

$$z + 12.477 * 10^{-2} = \frac{3.230 + 12.477}{-7.538 - 1.254} (y - 1.254 * 10^{-2}); \quad z = -1.787y - 10.237 * 10^{-2}$$

$$a_y = -5.728 * 10^{-2} [m]; \quad a_z = -10.237 * 10^{-2} [m]$$

$$y_{1,4} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{-5.728 * 10^{-2}} = 1.383 * 10^{-2} [m]; \quad z_{1,4} = \frac{-20.828 * 10^{-4}}{-10.237 * 10^{-2}} = 2.035 * 10^{-2} [m]$$



Results from program SECTION, version Nov 20 2000 10:02:02  
 az@limba.wil.pk.edu.pl (Adam Zaborski)

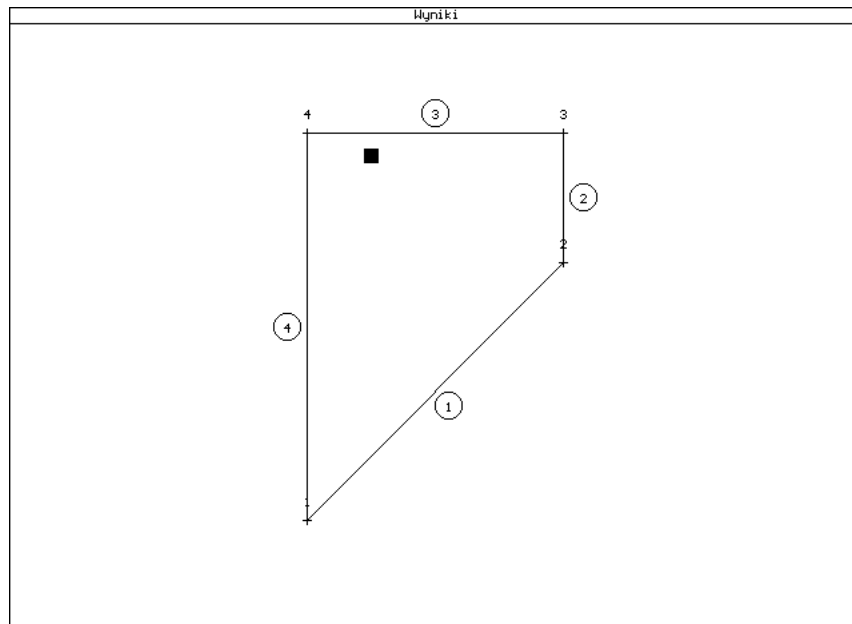
**Dane**

Współrzędne punktów w [m]

1 ( 0 , 0 )	2 ( 0.12 , 0.12 )	3 ( 0.12 , 0.18 )	4 ( 0 , 0.18 )
-------------	-------------------	-------------------	----------------

Obciążenie

Siła = -400000 [N] w punkcie ( 0.03 , 0.17 ) [m]



**Wyniki**

Powierzchnia = 0.0144 [m<sup>2</sup>]

Środek ciężkości ( 0.05 , 0.115 ) [m]

Momenty bezwładności względem osi centralnych

$$I_{y_c} = 2.556e-05 \text{ [m}^4\text{]}$$

$$I_{z_c} = 1.584e-05 \text{ [m}^4\text{]}$$

$$I_{y_c z_c} = 7.92e-06 \text{ [m}^4\text{]}$$

Momenty bezwładności względem osi głównych centralnych

$$I_1 = 2.99923e-05 \text{ [m}^4\text{]} = I_y$$

$$I_2 = 1.14077e-05 \text{ [m}^4\text{]} = I_z$$

$$\text{angle} = -29.2326 \text{ [deg]}$$

Główne centralne promienie bezwładności

$$i_1 = 0.0456377 \text{ [m]} = i_y$$

$$i_2 = 0.0281461 \text{ [m]} = i_z$$

Współrzędne punktów rdzenia: reference system / principal central system

$$( 0.0415385 , 0.133846 ) / ( -0.0165876 , 0.0123137 ) \text{ [m]}$$

$$( 0.0342857 , 0.107143 ) / ( -0.0098759 , -0.0145307 ) \text{ [m]}$$

$$( 0.0415385 , 0.0876923 ) / ( 0.00595197 , -0.0279621 ) \text{ [m]}$$

$$( 0.072 , 0.126 ) / ( 0.0138263 , 0.0203429 ) \text{ [m]}$$

Naprężenia normalne

$$1) 5.53030e+07 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$2) 4.36869e+07 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$3) -2.85354e+07 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$4) -1.61364e+08 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

Oś obojętna (in central principal system):

$$z1 = 3.04755 * y1 - 0.0544831$$

