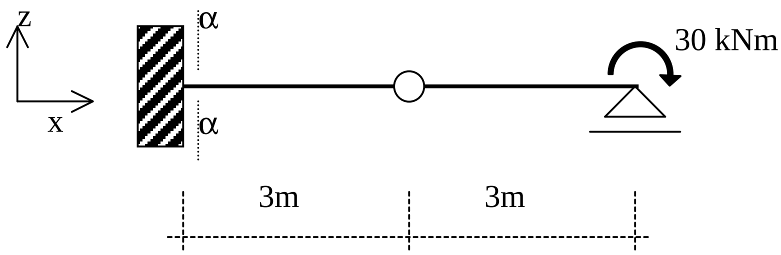
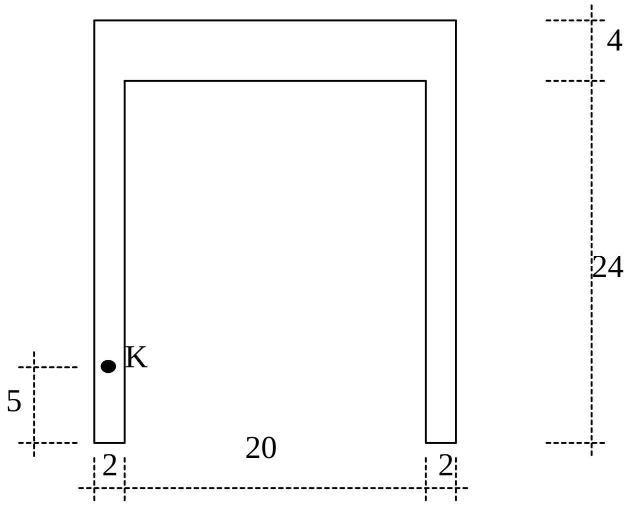
W punkcie K przekroju α–α obliczyć naprężenia główne i określić (obliczyć i narysować) kierunki główne.



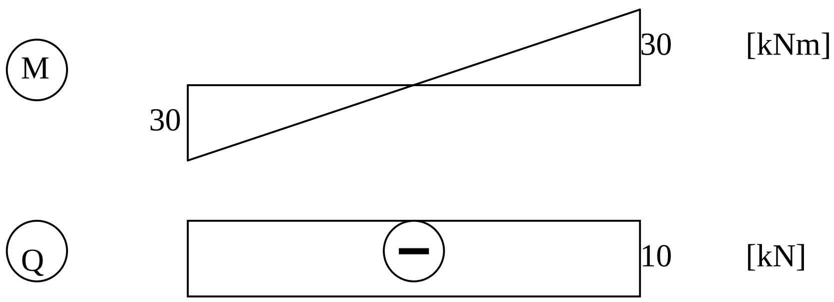
Przekrój poprzeczny (α–α i każdy inny), wymiary w [cm]:



Rozwiązanie:

Wyznaczenie sił przekrojowych w przekroju α–α.

Siły przekrojowe w przekroju α–α można obliczyć bezpośrednio, ale dla przypomnienia narysowano wykresy **M** i **Q** (**N**≡0).



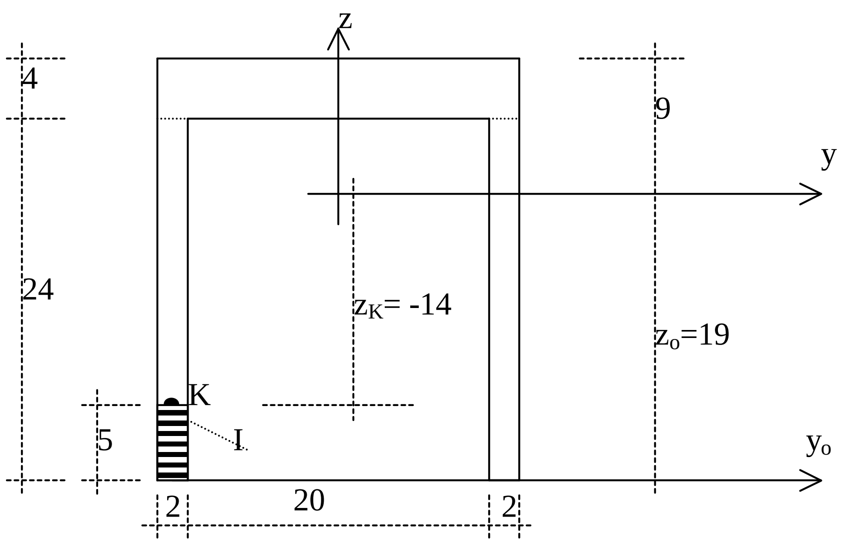
W przekroju α–α występuje moment zginający 30 kNm rozciągający włókna dolne i siła poprzeczna -10 kN, czyli naprężenia styczne τ_{xz} będą dodatnie (układ: x-prawo, z-góra)

Charakterystyki geometryczne przekroju:

Przekrój ma pionową oś symetrii, czyli jest na osią centralną główną – oznaczymy ją z .

Druga oś centralna główna jest prostopadła do z i przechodzi przez środek ciężkości, więc trzeba go znaleźć.

Moment statyczny względem dolnej krawędzi przekroju S_{yo} obliczymy dzieląc przekrój na trzy części: górną półkę 4*24 cm i dwa „boki" 24*2 cm. Licząc dalsze charakterystyki wykorzystamy ten sam podział.



S_{yo} = 4*24*26 + 2 [24*2*12] = 24 (104+48) = 3648 cm^3
Pole: F = 4*24 + 2 [24*2] = 24*8 = 192 cm^2
Położenie środka ciężkości: $z_o = S_{yo}/F$ = 19 cm (pokazano na rysunku powyżej)
Moment bezwładności względem osi centralnej głównej y.
Jy = 4^3*24/12 + 4*24*$(9-2)^2$ + 2 [24^3*2/12 + 24*2*$(19-12)^2$] = 14144 cm^4
W obliczeniach powyżej zastosowano wzór Steinera.

Naprężenie normalne σ_x w punkcie K przekroju α–α.

Zastosujemy konwencję znakowania momentów zginających: momenty rozciągające „spody" (które domyślnie przyjęto na dole) są dodatnie. W takim razie M_α = 30 kNm (plus)
Jeżeli stosujemy tą konwencję, to trzeba zastosować wzór:

$$\sigma_{x(\alpha)} = \frac{-M_\alpha}{J_y} z \qquad \text{(rozkład } \sigma_x \text{ w przekroju } \alpha\text{–}\alpha)$$

Naprężenie σ_x w p. K wyniesie: $\sigma_{x(K)} = \dfrac{-M_\alpha}{J_y} z_K$

gdzie współrzędna z punktu K w układzie (y-z) wynosi z_K = - 14 cm (patrz rysunek powyżej)

czyli: $$\sigma_{x(K)} = \frac{-30 \cdot 10^3\,\mathrm{Nm}}{14144 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4}\left(-14 \cdot 10^2\,\mathrm{m}\right) = 29{,}695\ \mathrm{MPa}$$

Naprężenie styczne τ_{xz} w punkcie K przekroju α–α.

Przekrój poprzeczny podzielono na wysokości punktu K na **dwie** części. Obliczono wartość bezwzględną momentu statycznego części zakreskowanej: $|S_y^I|$ = 5*2*(14+2,5) = 165 cm^3
Szerokość przecięcia: b = 2 cm

$$\tau_{xz(K)} = \frac{-Q_\alpha \cdot \left|S_y^I\right|}{J_y \cdot b} = \frac{10 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot 165 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3}{14144 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 0{,}5833\ \mathrm{MPa}$$

Uwaga: Gdyby przecięto przekrój poziomą linią na wysokości z_K to na dole byłyby dwie części o momencie statycznym dwa razy większym niż jedna (zakreskowana) część, ale szerokość przecięcia też wzrosłaby dwukrotne. Wynik liczbowy po zastosowaniu wzoru na τ_{xz} byłby identyczny jak powyżej, ale należy unikać podziału przekroju na trzy lub więcej części. Proszę pamiętać że wyprowadzając wzór rozpatrywano równowagę przy podziale przekroju poprzecznego na **dwie** części.

Stan naprężenia w punkcie K.

W układzie współrzędnych (x-z) stan naprężenia w punkcie K opisuje tensor:

$$T_{\sigma(K)} = \begin{bmatrix} \sigma_{x(K)} & \tau_{xz(K)} \\ \tau_{xz(K)} & \sigma_{z(K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29{,}695 & 0{,}5833 \\ 0{,}5833 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

Nie zapisywano drugiego wiersza i drugiej kolumny tensora ponieważ występują tam wartości zerowe, czyli w punkcie K istnieje płaski stan naprężeń.

Naprężenia główne obliczymy ze wzoru: $\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\,\tau_{xz}^2}$ (bo $\sigma_z = 0$)

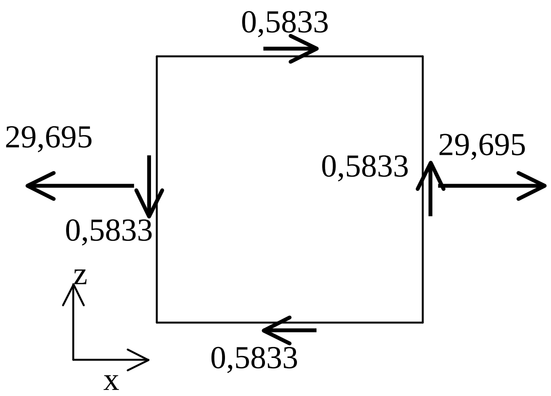
czyli: σ_1 = 29,706 MPa, σ_2 = - 0,01145 MPa

Kierunki główne naprężeń: $\text{tg}\,\alpha_i = \frac{-\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_i} = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_i}$

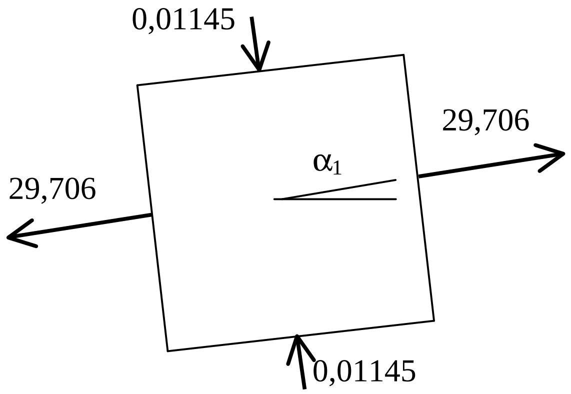
czyli tg α_1 = 0,5833/29,706 = 0,019636 α_1 = 1,125^o

tg α_2 = 0,5833/(-0,01145) = -50,943 α_2 = -88,875^o

Graficzne obrazy T_σ w punkcie K w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do płaszczyzny przekroju:



- w układzie osi (x-z)



- w układzie osi głównych T_σ

Na rysunku strzałki nie są w skali reprezentującej wartości naprężeń (niektóre musiałyby być niezauważalnie małe), ale poprawnie reprezentują znaki naprężeń. Kąt α_1 też jest powiększony na rysunku w stosunku do rzeczywistości.