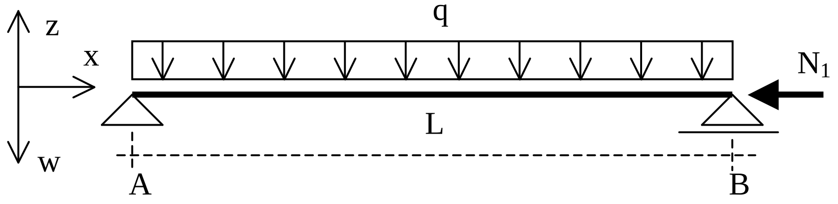
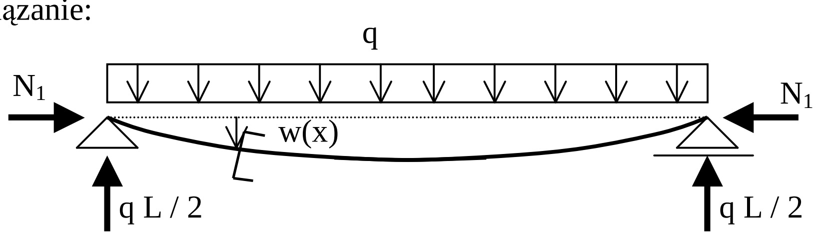
Odstępując od zasady zesztywnienia obliczyć maksymalne ugięcie i maksymalny moment zginający w belce wolnopodpartej, na całej długości obciążonej stałym q (obc. „prostokątne") i siłą ściskającą N_1.

Dane: q, N_1, E, J_y, L Szukane: f, M_{max}



Uwaga: Rozwiązanie będzie dotyczyło ściskania i zginania w płaszczyźnie x-z . Poza tym trzeba sprawdzić czy w płaszczyźnie x-y nie dojdzie do wyboczenia, – czyli czy obciążenie N_1 jest mniejsze od siły krytycznej wyliczonej dla smukłości $\lambda = L_w / i_z$

Rozwiązanie:



Odstępując od zasady zesztywnienia postulujemy, że pojawiające się ugięcia mają wpływ na siły przekrojowe, więc w miejscu o współrzędnej x moment zginający M w środku przekroju poprzecznego ugiętego pręta („klamerka") wynosi:

$$M(x) = \frac{q\,L}{2}\,x - q\,\frac{x^2}{2} + N_1\;w(x) \tag{1}$$

Odstąpienie od zasady zesztywnienia spowodowało, że w równaniu (1) pojawił się ostatni człon: $N_1\,w(x)$

Uproszczoną zależność pomiędzy krzywizną a momentem zginającym zapiszemy:

$$w''(x) = -\,M(x)/(E\,J_y) \tag{2}$$

Wstawiając wzór (1) do (2) i przenosząc w''(x) i w(x) na jedną stronę mamy:

$$w''(x) + \frac{N_1}{E\,J_y}\;w(x) = \frac{1}{E\,J_y}\left(\frac{-q\,L}{2}\,x + q\,\frac{x^2}{2}\right) \tag{3}$$

Zdefiniujemy: $k^2 = N_1/(E\,J_y)$ (4)

$$w''(x) + k^2\;w(x) = \frac{k^2}{N_1}\left(\frac{-q\,L}{2}\,x + q\,\frac{x^2}{2}\right) \tag{5}$$

Równanie (5) jest niejednorodnym równaniem różniczkowym 2-go stopnia, które ma rozwiązanie w postaci sumy całki ogólnej $w_o(x)$ i szczególnej $w_s(x)$:

$$w_o(x) = A\,\sin(kx) + B\,\cos(kx) \tag{6}$$

$$w_s(x) = C_0 + C_1\,x + C_2\,x^2 \tag{7}$$

Jak widać całki szczególnej poszukujemy wśród wielomianów 2-go stopnia, tego samego stopnia jest też prawa strona równania (5). Wstawiamy (7) do (5):

$$2\,C_2 + k^2\left(C_0 + C_1\;x + C_2\;x^2\right) = \frac{k^2}{N_1}\left(\frac{-q\,L}{2}\,x + q\,\frac{x^2}{2}\right) \tag{8}$$

Porównując współczynniki wyrazu wolnego, przy pierwszej i przy drugiej potędze x mamy:

$$2\,C_2 + k^2\;C_0 = 0 \tag{9}$$

$$k^2\;C_1 = \frac{k^2}{N_1}\left(\frac{-q\,L}{2}\right) \tag{10}$$

$$k^2\;C_2 = \frac{k^2}{N_1}\,\frac{q}{2} \tag{11}$$

Z równania (10) wyznaczymy C_1, z równania (11) C_2, następnie z (9) wyznaczymy C_0 :

$$C_1 = \frac{-q\,L}{2\,N_1} \quad , \quad C_2 = \frac{q}{2\,N_1} \quad , \quad C_0 = \frac{-q}{N_1\,k^2} \tag{12}$$

$$w(x) = w_o(x) + w_s(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) + \frac{q}{2\,N_1}x^2 - \frac{q\,L}{2\,N_1}x - \frac{q}{N_1\,k^2} \tag{13}$$

Stałe całkowania A i B znajdziemy wykorzystując kinematyczne warunki brzegowe:

$$w(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{q}{N_1\,k^2} \tag{14}$$

$$w(x=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\sin(kL) + B\cos(kL) + \frac{q}{2\,N_1}L^2 - \frac{q}{2\,N_1}L^2 - \frac{q}{N_1\,k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A\sin(kL) = \frac{q}{N_1\,k^2} - B\cos(kL) = \frac{q}{N_1\,k^2} - \frac{q}{N_1\,k^2}\cos(kL) = \frac{q}{N_1\,k^2}\big(1-\cos(kL)\big)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{q}{N_1\,k^2}\frac{\big(1-\cos(kL)\big)}{\sin(kL)} \tag{15}$$

Po wstawieniu A i B z (14) i (15) do (13) i po uporządkowaniu mamy:

$$w(x) = \frac{q}{N_1\,k^2}\left[\frac{\big(1-\cos(kL)\big)}{\sin(kL)}\sin(kx) + \cos(kx) + \frac{k^2}{2}x^2 - \frac{k^2\,L}{2}x - 1\right] \tag{16}$$

Aby znaleźć maksymalne ugięcie trzeba by zbadać funkcję w(x) - ale wiemy, że równanie (16) jest rozwiązaniem belki pokazanej na rysunku. Największe ugięcie będzie w środku, dla x = L/2

$$f = w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{q}{N_1\,k^2}\left[\frac{\big(1-\cos(kL)\big)}{\sin(kL)}\sin\left(k\frac{L}{2}\right) + \cos\left(k\frac{L}{2}\right) + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{L^2}{4} - \frac{k^2\,L}{2}\cdot\frac{L}{2} - 1\right] \tag{17}$$

Oznaczymy: $u = \dfrac{k\,L}{2}$ i zastosujemy tożsamości trygonometryczne: (18)

$$\cos(kL) = \cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u) \quad , \quad \sin(kL) = \sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$$

$$f = \frac{q}{N_1\,k^2}\left[\frac{\big(1-1+2\sin^2(u)\big)}{2\sin(u)\cos(u)}\sin(u) + \cos(u) - \frac{u^2}{2} - 1\right] = \frac{q}{N_1\,k^2}\left[\frac{\sin^2(u)}{\cos(u)} + \cos(u) - \frac{u^2}{2} - 1\right] =$$

$$= \frac{q}{N_1\,k^2}\left[\frac{\sin^2(u)+\cos^2(u)}{\cos(u)} - \frac{u^2}{2} - 1\right] = \frac{q}{N_1\,k^2}\left[\frac{1}{\cos(u)} - \frac{u^2}{2} - 1\right] = \frac{q}{N_1\,k^2}\left[\frac{2 - u^2\cos(u) - 2\cos(u)}{2\cos(u)}\right]$$

Ostatnią postać można zastosować do obliczeń.

Przekształćmy jeszcze współczynnik przed kwadratowym nawiasem.

Z definicji (4) mamy: $N_1 = k^2\,(E\,J_y)$ czyli: $N_1\,k^2 = k^4\,(E\,J_y)$

Z definicji (18) mamy: $k = 2\,u/L$ czyli: $k^4 = 16\,u^4/L^4$

Współczynnik: $$\frac{q}{N_1\,k^2} = \frac{q}{k^4\,E\,J_y} = \frac{q\,L^4}{16\,u^4\,E\,J_y}$$

$$f = \frac{q\,L^4}{32\,E\,J_y}\cdot\frac{2 - u^2\cos(u) - 2\cos(u)}{u^4\cos(u)} \tag{19}$$

Na koniec części dotyczącej maksymalnego ugięcia f przeanalizujemy wzór (19) w dwu skrajnych przypadkach.

Gdy wartość siły ściskającej N_1 zmierza do siły krytycznej określonej wzorem Eulera:

$$N_1 \to \frac{\Pi^2\,E\,J_y}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{E\,J_y} = k^2 \to \frac{\Pi^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad k\,L \to \Pi \quad \Rightarrow \quad u \to \frac{\Pi}{2}$$

W tym przypadku $\cos(u\to\Pi/2) \to 0$ czyli $f\to\infty$. Wynik ten jest niepoprawny – w rzeczywistości obserwujemy skończone ugięcia. Błąd polega na zastosowaniu wzoru (19) dla dużych ugięć a przy wyprowadzaniu obowiązywała zasada małych pochodnych przemieszczeń ($w'\cong 0$) – nie mylić z zasadą

zesztywnienia, od której odstąpiliśmy. Dzięki zastosowaniu zasady małych pochodnych przemieszczeń uproszczono wzór określający krzywiznę $\cong w''$. Mimo wszystko zastosowanie wzoru (19), dającego dla obciążeń ściskających bliskich sile Eulerowskiej zawyżone wyniki, jest bezpieczne - rzeczywiste ugięcia będą mniejsze.
Drugi skrajny przypadek - siła ściskająca N_1 zmierza do zera:

$$N_1 \to 0 \quad \Rightarrow \quad k \to 0 \quad \Rightarrow \quad u \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(u) \to 1$$

Obliczymy granice wyrażenia zależnego od u ze wzoru (19), przy $u\to 0$. Ze względu na pojawianie się wyrażenia nieoznaczonego typu 0/0 zastosujemy kilkakrotnie zasadę de l'Hospitala.

$$\lim_{u\to 0}\frac{2-u^2\cos(u)-2\cos(u)}{u^4\cos(u)} \overset{H}{=} \lim_{u\to 0}\frac{u^2\sin(u)-2u\cdot\cos(u)+2\sin(u)}{4u^3\cos(u)-u^4\sin(u)} \overset{H}{=}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)+2u\cdot\sin(u)+2u\cdot\sin(u)-2\cos(u)+2\cos(u)}{12u^2\cos(u)-4u^3\sin(u)-4u^3\sin(u)-u^4\cos(u)} =$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)+4u\cdot\sin(u)}{12u^2\cos(u)-8u^3\sin(u)-u^4\cos(u)} \overset{H}{=}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{-u^2\sin(u)+2u\cdot\cos(u)+4u\cdot\cos(u)+4\sin(u)}{-12u^2\sin(u)+24u\cdot\cos(u)-8u^3\cos(u)-24u^2\sin(u)+u^4\sin(u)-4u^3\cos(u)} =$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{4\sin(u)+6u\cdot\cos(u)-u^2\sin(u)}{24u\cdot\cos(u)-36u^2\sin(u)-12u^3\cos(u)+u^4\sin(u)} \overset{H}{=}$$

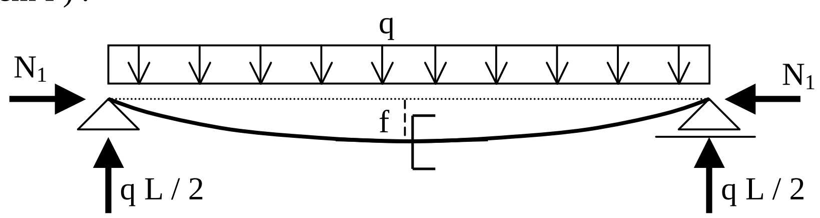
$$\lim_{u\to 0}\frac{4\cos(u)+6\cos(u)-6u\cdot\sin(u)-\ldots\ldots}{24\cos(u)-24u\cdot\sin(u)-\ldots\ldots} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

Przy ostatnim zastosowaniu zasady de l'Hospitala zapisano pochodną od dwóch pierwszych składników licznika i od pierwszego składnika mianownika. Pozostałe składniki zaznaczone kropkami zawierają czynnik u w 1-szej, 2-giej, 3-ciej lub 4-tej potędze, wartość takich czynników zmierza do zera.

Dla $N_1=0$ ugięcie $$f = f_o = \frac{q L^4}{32 E J_y}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{384}\cdot\frac{q L^4}{E J_y} \qquad (20)$$

Ostatni wynik łatwiej można znaleźć obliczając ugięcie belki wolnopodpartej obciążonej tylko poprzecznie (q). Obliczenia dla $N_1=0$ przeprowadzono, aby sprawdzić czy wzór określający ugięcie (19), daje poprawny wynik w tym przypadku – widać, że tak.

Określenie maksymalnego momentu zginającego.
Z symetrii belki wynika, że maksymalny moment wystąpi w środku rozpiętości (analogicznie było z ugięciem f) .



$$M_{max} = M\left(x=\frac{L}{2}\right) = \frac{q L^2}{8} + N_1\cdot f = \frac{q L^2}{8} + \frac{q}{k^2}\left[\frac{1}{\cos(u)} - \frac{u^2}{2} - 1\right] = \frac{q L^2}{8} + \frac{q}{k^2\cos(u)} - \frac{q}{k^2}\cdot\frac{u^2}{2} - \frac{q}{k^2} =$$

$$\frac{q L^2}{8} + \frac{q}{k^2\cos(u)} - \frac{q}{k^2}\cdot\frac{k^2 L^2}{8} - \frac{q}{k^2} = \frac{q}{k^2\cos(u)} - \frac{q}{k^2} = \frac{q}{k^2}\left(\frac{1}{\cos(u)} - 1\right) = \frac{q L^2}{4u^2}\left(\frac{1-\cos(u)}{\cos(u)}\right)$$

Ostatecznie zapiszemy: $$M_{max} = \frac{q L^2}{4}\cdot\frac{1-\cos(u)}{u^2\cos(u)} \qquad (21)$$

Analogicznie jak dla ugięcia f przeanalizujemy wzór (21) w dwu skrajnych przypadkach.

Gdy wartość siły ściskającej N_1 zmierza do siły krytycznej określonej wzorem Eulera:

$$N_1 \to \frac{\Pi^2 E J_y}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{E J_y} = k^2 \to \frac{\Pi^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad k L \to \Pi \quad \Rightarrow \quad u \to \frac{\Pi}{2}$$

W tym przypadku $\cos(u \to \Pi/2) \to 0$ czyli $M_{max} \to \infty$. Ten wynik też jest niepoprawny, – z czego wynika błąd i jego konsekwencje opisano w części dotyczącej ugięcia f . Analogicznie: zastosowanie wzoru (21), dającego dla obciążeń ściskających bliskich sile Eulerowskiej zawyżone wyniki, jest bezpieczne - rzeczywiste momenty zginające będą mniejsze.

Drugi skrajny przypadek - siła ściskająca N_1 zmierza do zera:

$$N_1 \to 0 \quad \Rightarrow \quad k \to 0 \quad \Rightarrow \quad u \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(u) \to 1$$

Obliczymy granice wyrażenia zależnego od u ze wzoru (21), przy $u \to 0$. Ze względu na pojawianie się wyrażenia nieoznaczonego typu 0/0 dwukrotnie zastosujemy zasadę de l'Hospitala.

$$\lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2 \cos(u)} \overset{H}{=} \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{2\, u \cdot \cos(u) - u^2 \sin(u)} \overset{H}{=}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\cos(u)}{2\cos(u) - 2\, u \cdot \sin(u) - 2\, u \cdot \sin(u) - u^2 \cos(u)} = \frac{1}{2}$$

Dla N_1=0 moment $M_{max} = M_{max\,o} = \frac{q\,L^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{q\,L^2}{8}$ (22)

Obliczenia dla N_1=0 przeprowadzono, aby sprawdzić czy wzór określający maksymalny moment (21), daje poprawny wynik w tym przypadku – widać, że tak.