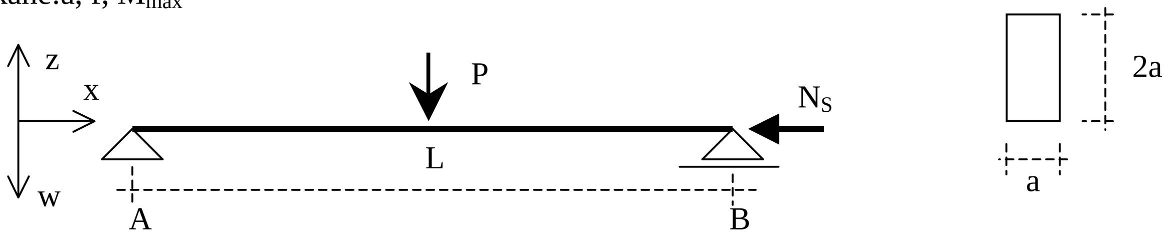
Odstępując od zasady zesztywnienia dobrać wymiar a , oblicz maksymalne ugięcie i maksymalny moment zginający w belce wolnopodpartej, obciążonej w środku pionową siłą P i siłą ściskającą N_S.
Dane: P=20 kN, N_S=100 kN, E=200 GPa, L=4 m, R=150 MPa
Szukane:a, f, M_{max}



Uwaga: Rozwiązanie będzie dotyczyło ściskania i zginania w płaszczyźnie x-z . Poza tym trzeba sprawdzić czy w płaszczyźnie x-y nie dojdzie do wyboczenia, – czyli czy obciążenie N_S jest mniejsze od siły krytycznej wyliczonej dla smukłości $\lambda = L_w / i_z$

Rozwiązanie:
Szerokość belki a i wysokość 2a musi być taka aby wartość największego naprężenia normalnego nie przekroczyła wytrzymałości na ściskanie R , czyli:

$$\max|\sigma_x| = \frac{M}{W} + \frac{N_S}{F} < R$$

gdzie: M to wartość momentu zginającego M_y , W to wskaźnik wytrzymałości względem osi y, F to pole przekroju poprzecznego.

Charakterystyki geometryczne tego przekroju poprzecznego:

$$F = 2\,a^2 \quad , \quad W = \frac{(2a)^2 a}{6} = \frac{2}{3} a^3 \quad , \quad J = \frac{(2a)^3 a}{12} = \frac{2}{3} a^4$$

gdzie J to moment bezwładności względem poziomej głównej centralnej osi y.

Wartość momentu zginającego w środku belki przy odstępstwie od zasady zesztywnienia jest określona wzorem:

$$M = \frac{PL}{4}\frac{\operatorname{tg} u}{u} \quad , \text{ gdzie: } \quad u = \frac{kL}{2} = \sqrt{\frac{N_S}{EJ}}\,\frac{L}{2} = \sqrt{\frac{10^5\ \mathrm{N}}{2\cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}\ J}}\ 2\mathrm{m}$$

Pierwsze oszacowanie wielkości a znajdziemy przyjmując ma chwilę zasadę zesztywnienia i zaniedbując siłę podłużną N_S , wtedy: M=0,25 PL ,

$$\max|\sigma_x| = \frac{M}{W} = \frac{20\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 4\mathrm{m}}{4}\,\frac{3}{2a^3} < 150 \cdot 10^6\ \mathrm{N/m^2}$$

$$20\cdot 10^3\ \mathrm{N\,m}\ \frac{3}{2}\,\frac{10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{150\ \mathrm{N}} < a^3 \quad => \quad 200\ \mathrm{cm}^3 < a^3 \quad => \quad 5{,}848\ \mathrm{cm} < a$$

przyjmujemy a=6 cm (1-sze przybliżenie)

wtedy: $J = \frac{2}{3} a^4 = 864\ \mathrm{cm}^4$

$$u = \sqrt{\frac{10^5\ \mathrm{N}}{2\cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}\ 864\cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^4}}\ 2\mathrm{m} = \sqrt{\frac{100}{2\cdot\ 864\cdot \mathrm{m}^2}}\ 2\mathrm{m} = 0{,}4811$$

$$M = \frac{PL}{4}\frac{\operatorname{tg} u}{u} = \frac{PL}{4}\ 1.085 = 21{,}7\ \mathrm{kNm}$$

$$F = 2\,a^2 = 72\ \mathrm{cm}^2 \quad , \quad W = \frac{2}{3} a^3 = 144\ \mathrm{cm}^3$$

$$\max|\sigma_x| = \frac{M}{W} + \frac{N_S}{F} = \frac{21700\cdot \mathrm{Nm}}{144\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^3} + \frac{1000\cdot 10^2\,\mathrm{N}}{72\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = (150{,}7 + 13{,}9)\ \mathrm{MPa} = 164{,}6\ \mathrm{MPa}$$

powyższa wartość jest większa od wytrzymałości R=150 MPa, więc wymiar a trzeba zwiększyć, przyjmujemy a=6,5 cm (2-gie przybliżenie)

wtedy: $J = \frac{2}{3} a^4 = 1190 \text{ cm}^4$

$$u = \sqrt{\frac{10^5 \text{ N}}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \ 1190 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4}} \ 2\text{m} = \sqrt{\frac{100}{2 \cdot \ 1190 \cdot \text{m}^2}} \ 2\text{m} = 0{,}41$$

$$M = \frac{PL}{4} \frac{\text{tg } u}{u} = \frac{PL}{4} \ 1.06 = 21{,}2 \text{ kNm}$$

$F = 2 \ a^2 = 84{,}5 \text{ cm}^2$, $W = \frac{2}{3} a^3 = 183{,}08 \text{ cm}^3$

$$\max|\sigma_x| = \frac{M}{W} + \frac{N_S}{F} = \frac{21200 \cdot \text{Nm}}{183{,}1 \cdot 10^{-6} \text{m}^3} + \frac{1000 \cdot 10^2 \text{ N}}{84{,}5 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = (115{,}8 + 11{,}8) \text{ MPa} = 127{,}6 \text{ MPa}$$

powyższa wartość jest mniejsza od wytrzymałości R=150 MPa, wymiar a można zmniejszyć ,
przyjmujemy a=6,2 cm (3-gie przybliżenie)

wtedy: $J = \frac{2}{3} a^4 = 985{,}1 \text{ cm}^4$

$$u = \sqrt{\frac{10^5 \text{ N}}{2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \ 985{,}1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4}} \ 2\text{m} = \sqrt{\frac{100}{2 \cdot \ 985{,}1 \cdot \text{m}^2}} \ 2\text{m} = 0{,}4506$$

$$M = \frac{PL}{4} \frac{\text{tg } u}{u} = \frac{PL}{4} \ 1.0737 = 21{,}473 \text{ kNm}$$

$F = 2 \ a^2 = 76{,}88 \text{ cm}^2$, $W = \frac{2}{3} a^3 = 158{,}885 \text{ cm}^3$

$$\max|\sigma_x| = \frac{M}{W} + \frac{N_S}{F} = \frac{21473 \cdot \text{Nm}}{158{,}9 \cdot 10^{-6} \text{m}^3} + \frac{1000 \cdot 10^2 \text{ N}}{76{,}88 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = (135{,}15 + 13{,}01) \text{ MPa} = 148{,}16 \text{ MPa}$$

powyższa wartość jest mniejsza od wytrzymałości R=150 MPa, ostatecznie przyjęto wymiar a=6,2 cm.

Maksymalne ugięcie – w środku belki, obliczamy wykorzystując wzór:

$$f = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_y} \cdot 3 \frac{\text{tg } u - u}{u^3} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_y} \cdot 1{,}0885 = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 4^3 \cdot \text{m}^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \cdot 985{,}1 \cdot 10^{-8} \text{m}^4} \cdot 1{,}0885 =$$
$$= 13{,}54\text{mm} \cdot 1{,}0885 = 14{,}73\text{mm}$$

Sprawdzenie czy w płaszczyźnie x-y nie dojdzie do wyboczenia – czyli czy obciążenie N_S jest mniejsze od siły krytycznej wyliczonej dla smukłości $\lambda = L_w / i_z$

Minimalny moment bezwładności: $J_{min} = J_z = \frac{(a)^3 2a}{12} = \frac{1}{6} a^4 = 246{,}27 \text{ cm}^4$

Minimalny promień bezwładności: $i_{min} = i_z = 1{,}7898$ cm

Smukłość: $\lambda = L_w / i_z = 400 / 1{,}7898 = 223{,}46$

Smukłość graniczna dla tego materiału : $\lambda \text{ gr} = \Pi \sqrt{\frac{E}{R}} = \Pi \sqrt{\frac{200 \text{ GPa}}{0{,}15 \text{ GPa}}} = 114{,}71$

W powyższym wzorze wytrzymałość R utożsamiono z granicą sprężystości.

Relacja : $\lambda > \lambda$ gr wskazuje że do wyznaczenia siły krytycznej należy wykorzystać wzór Eulera.

$$P_E = \frac{\Pi^2 \ E \cdot J_{min}}{L_w^2} = \frac{\Pi^2 \ 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \cdot 246{,}27 \cdot 10^{-8} \text{m}^4}{16 \text{ m}^2} = 303{,}82 \text{ kN}$$

Widać że siła N_S=100 kN jest mniejsza od siły krytycznej.

Nawet uwzględniając współczynnik bezpieczeństwa dla wyboczenia o wartości: $s_w = 2{,}5$

$P_E / s_w = 303{,}82 \text{ kN} / 2{,}5 = 121{,}53$ kN widać że siła N_S też jest mniejsza od tej wartości.